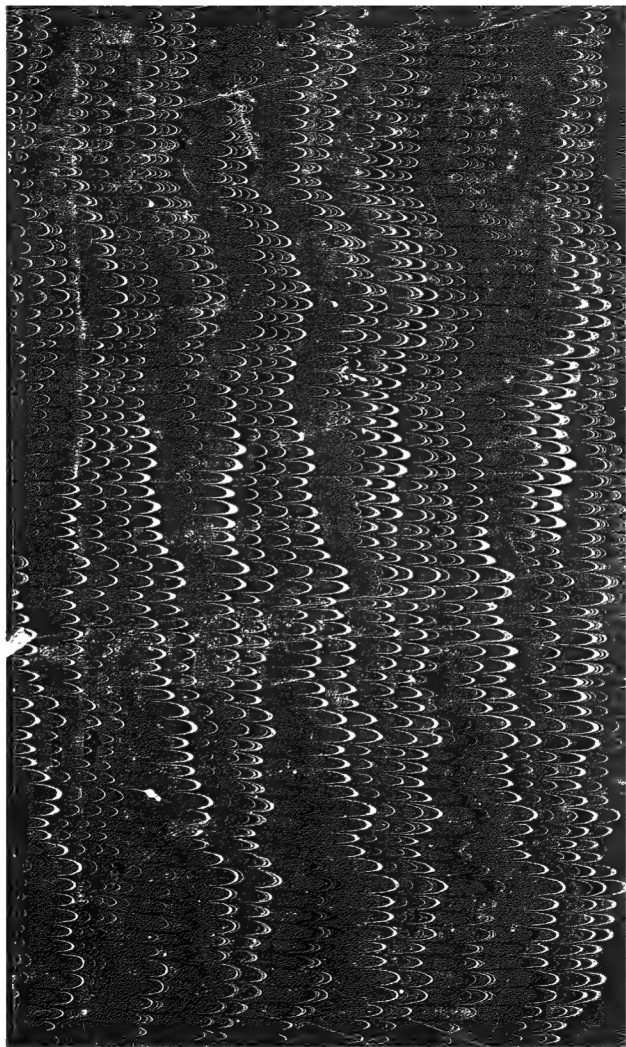
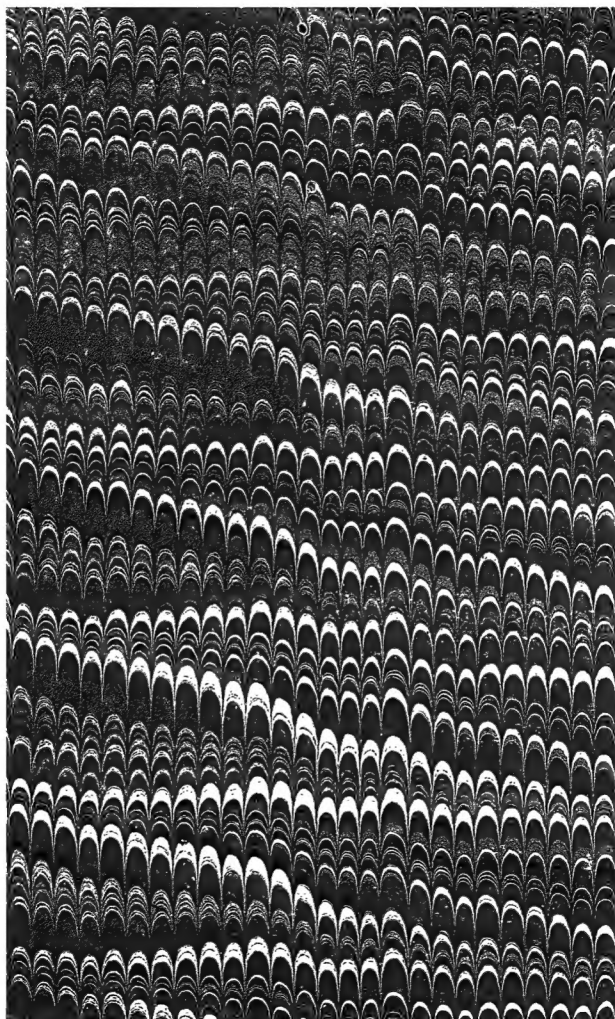


رقم ٢٦٢

الكتاب علوم رياضية قديمة

١٧١٤













# المجلد الاول

من كتاب التحفة البهية في الاصول الهندسية

---

تأليف

حضرة احمد بك قديم

ناظر مدرسة دار العلوم وقلم الترجمة

---



( الطبعة الاولى )

بالطبعة الكبرى الاميرية يولاق مصر المحمية

سنة ١٣٠٥ هجرية



## بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله مبدع نظام الكائنات على محور الاستقامة والنبات والصلاة والسلام على  
نبينا قطب دائرة الكرة الكونية وعلى آله وأصحابه المتشككين بأشكال أعماله السنية  
(وبعد) فلما كانت مدرسة التجهيزية في احتياج الى كتاب في الاصول الهندسية  
على حسب البروجرام اعتيت بجمعه فجاء بحمد الله على وفق المرام وجرأته الى أربعة  
أجزاء كل جزء منها لسنة من سنينها المكتيبة وسميته (الحفرة البهية في الاصول الهندسية)  
ثم عنى الى أن أزيد فوائده وأوضحه بطرف فرائد تحتاج اليها الفرقة التحضيرية من  
مدرسة المهندسخانة الخديوية فيزتها بدقة الحروف كما هو المستعمل المألوف والله أسأل  
أن يعم نفعه وأن يحسن في النفوس وقعه في ظل من حسن التفاته للمعارف  
وأسدى لرعاياه كل تليد وطارف من هو بالثناء حقيق أفندينا (محمد باشا توفيق)  
متعته الله بأشباهه الفخام وأنجحاله الكرام

احمد نظم  
ناظر مدرسة دارالعلوم  
وقلم الترجمة

## المجلد الاول

من التحفة الهندسية في الاصول الهندسية

### في الاشكال المستقيمة الاضلاع ومحيط الدائرة

## الباب الاول

في الاشكال المستقيمة الاضلاع

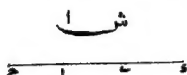
## الفصل الاول

في المبادئ

- (١) حجم الجسم عبارة عن المحل الذي يشغله من الفراغ مهما كان صغر الجسم فإنه لا بد أن يكون له امتداد في كل جهة من جهاته ولا يعتبر عادة الا في ثلاث جهات أصلية يعبر عنها بالابعاد وتسمى بالطول والعرض والارتفاع غير أن الارتفاع يسمى عمقاً أو سمكاً على حسب مقتضيات الاحوال
- (٢) وأوجه الجسم المحددة له تسمى بالسطوح فالسطح اذن ليس الا غلظاً فتصور يا مجرداعن السمك أى لا يكون له غير بعدين فقط وهما الطول والعرض
- (٣) وتقاطع السطوح يحدث عنه ما يسمى بالخطوط فالخطوط اذن مجردة عن السمك والعرض وليس لها سوى الطول
- (٤) وتقاطع الخطين يحدث عنه ما يسمى بالنقطة فالنقطة لا امتداد لها يطلق اسم الشكل على وجه العموم على كل من الاجسام والسطوح والخطوط يقال للشكلين انهما متساويان متى أمكن انطباق أجزاءهما على بعضهما انطباقاً تاماً
- (٥) الفرض من علم الهندسة دراسة خواص الاشكال

(٦) الخط المستقيم هو أقصر بعد بين نقطتين مثل المستقيم أ ب (شكل ١)

ويمكن تصور تولده من تحرك نقطة بحيث تتجه دائماً نحو نقطة أخرى ثابتة ومعينة

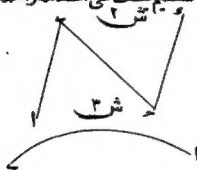


ويستدل من ذلك

أولاً - انه هو عبارة عن مقدار مقياس البعد المحصور بين النقطتين ١ و ٢  
ثانياً - انه يمكن تصور امتداده الى ما لا نهاية من جهة النقطتين ١ و ٢ نحو النقطتين  
٣ و ٤ مثلاً المجموع لا يتكون منه الامستقيم واحد وبناء عليه يمكن تعيين اتجاه أى مستقيم  
لعدم معرفة نقطتين منه

ثالثاً - ان المستقيمين لا يمكن أن يشتركا في نقطتين أو في جزء من مستقيم الا اذا اتحدا في جميع امتدادهما

رابعاً - أنه لا يمكن أن يعيد النقطتين ١ و ٢ المستقيم واحد  
(٧) والخط المنكسر هو متر كب من جملته أجزاء من خط مستقيم ليست على استقامة واحدة  
مثل الخط ا ب ح د (شكل ٢)



(٨) والخط المنحني مالم يس مستقيماً ولا مري بكامن خطوط مستقيمة مثل الخط أ ب (شكل ٣)

ويمكن تصور تولد هذا الخط من تحرك نقطة بحيث تغير اتجاهها في كل لحظة بدرجات غير محسوسة تابعة قانوناً

وننتج من هذا التعرف أنه يمكن أن يعيد بن النقطتين ١ و ٢ خطوط منحنية لانهاية لعدددها  
وإن فالخطوط ثلاثة مستقيم ومنكسر ومنحن

(٩) السطح المستوي أو المستوى فقط هو السطح الذي ينطبق عليه المستقيم كمال الانطباق في جميع جهاته

وحيث قد علم مما تقدم أنه لا يوجد الانوع واحد من المستقيم فيعلم ضرورة

أولاً - عدم تعدد نوع المستوى

ثانياً - أنه يمكن تصور امتداد المستوى في كل جهة من جهاته امتداداً غير نهائي والجموع لا تتكوّن منه إلا مستواً واحداً

ثالثا - ان المستقيم يمكن أن يمر به مستويات لانهاية لعددها

رابعاً - ان كل مستقيم مشترك مع المستوى في نقطتين انطبق عليه في جميع امتداده



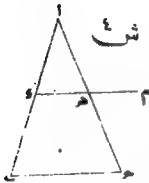
## (١٠) ولتذكر هذه القوائد الاتية

النظرية هي قضية تؤل بواسطة البرهان الى البديهيات  
القائدة هي نظرية معدة لتحضير برهان نظرية أخرى أهم منها  
النتيجة هي الثمرة المستخرجة من نظرية أو جملة نظريات  
العملية هي المسئلة التي يراد حلها وجوابها يسمى حلا  
العكس هو قضية يكون فرضها نتيجة قضية أخرى وتنتج من افراض تلك القضية  
التنبية هو اشارة الى مفهوم يؤخذ من قضية أو جملة قضائيات تقيمت

## نظرية

(١١) كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يربهم امستوا واحدان

لتكن  $A, B, C$  النقاط الثلاث (شكل ٤)



الاول - يرب المستقيم  $AB$  مستو زمرة بجرف  $C$  ثم  
يتصور دورانه حول هذا المستقيم حتى يصل الى نقطة  $C$  وبذلك  
يتعين وضعه

الثاني - اذا فرض امكان امر ار مستو آخر  $E$  بالنقط الثلاث  
المذكورة وكانت  $M$  احدى نقطه فنصل بين  $M$  و  $D$  احدى  
نقط المستقيم  $AB$  بمستقيم  $M$  بحيث يكون قاطعا للمستقيم

$AC$  فن حيث ان المستقيم  $M$  الموجود في مستوى  $E$  ما لا ينقطي  $H$  و  $D$  من  
المستوى  $E$  فيكون موجودا فيه بقلمه (٩ رابعا)

وينتج من ذلك

أولا - ان كل مستقيمين متقاطعين يتعين بهما مستو

ثانيا - ان كل مستقيم ونقطة خارجة عنه يتعين بهما مستو

ثالثا - انه لا يمكن لانتظام مستو على آخر أو جزأى مستويين على بعضهما اشتراكهما في ثلاث  
نقط ليست على استقامة واحدة

## الفصل الثاني

### في الزوايا

#### تعريف

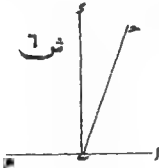
(١٢) اذا تقاطع المستقيمان  $AB$  و  $AC$  في نقطة  $A$  (شكل ٥) فان جزء المستوى  $ABC$  أي الانفرجاق الواقع بينهما يسمى زاوية ويسمى المستقيمان المذكوران المحددان لها ضلعي الزاوية وتسمى نقطة تلاقيهما رأس الزاوية



تقرأ الزاوية نارة بحرف الرأس وحده اذا كانت منفردة وبحروف ثلاثة بشرط أن يكون حرف الرأس في الوسط اذا اشتركت في الرأس مع زوايا أخرى

لا يرتبط مقدار أي زاوية بطول ضلعيها بل بالانفرجاق الواقع بينهما وعلى ذلك فالزاويتان المتساويتان هما اللتان ينطبق انفرجاقهما على بعضهما بدون نظراتي تفاوت طول الاضلاع

كل زاويتين مثل  $ABC$  و  $DEF$  اشتركت في ضلع واحد واتحدتا في الرأس يقال لهما متجاورتان كما في (شكل ٦)



يمكن ضم زاويتين أو أكثر الى بعضهما أو طرح

زاوية من أخرى فالزاوية  $ABC = DEF + GHI$  و  $ABC = DEF - GHI$

والزاوية  $ABC = DEF - GHI$  (شكل ٦)

(١٣) أنواع الزاوية ثلاثة قائمة وحادة ومنفرجة

فالزاوية القائمة هي إحدى الزاويتين المتجاورتين

المتساويتين الحادتين من تلاقي مستقيمين أو مثل زاوية  $ABC$  وزاوية  $DEF$  (شكل ٦)

والزاوية الحادة هي ما كانت أصغر من القائمة مثل  $ABC$  و  $DEF$

والزاوية المنفرجة هي ما كانت أكبر من الزاوية القائمة مثل زاوية  $ABC$  و  $DEF$

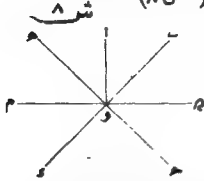
(١٤) المستقيم المنصف لزاوية فهو مستقيم عبر رأسها ويقسم الانفرجاق الواقع بين ضلعيها الى

قسمين متساويين مثل المستقيم  $BC$  المنصف لزاوية  $ABC$  (شكل ٦)



ثالثا - ان مجموع الزوايا المجمعة حول نقطة واحدة يساوى أربع زوايا قائم أعني ان

$$\text{هـ أ} + \text{أ ب} + \text{ب و} + \text{و د} + \text{د هـ} = ٤ \text{ ن (شكل ٨)}$$



لانه لو تم من نقطة و المستقيم م لكنت جميع هذه الزوايا بعضها فوق هذا المستقيم والبعض الآخر تحته وحيث ان مجموع الزوايا التي فوقه يساوى قائمتين وكذلك الذي تحته فيكون مجموع الكل مساويا لاربعة قوائم

رابعا - اذا أحدث مستقيم يتقاطعه مع آخر زاويتين متجاورتين قائمتين كان هذا الاخير مكوّنا

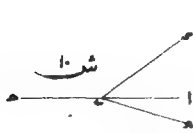


أيضاً مع الأول زاويتين متجاورتين قائمتين (شكل ٩) أعني اذا صنع المستقيم د ب تقاطعه مع المستقيم ا ب الزاويتين أ هـ و د هـ المتجاورتين القائمتين كانت الزاويتان أ هـ و ا هـ المتجاورتان الحادتين من تقاطع المستقيم ا ب بالمستقيم د ب قائمتين أيضاً وهو أمر ظاهر لانه حيث كانت احدى المتجاورتين أ هـ د قائمة فتكون الاخرى كذلك (نتيجة ٢)

## نظرية

(١٦) اذا كان مجموع أي زاويتين متجاورتين مساويا للقائمتين كان ضلعاهما المتطرفان على

استقامة واحدة (شكل ١٠)

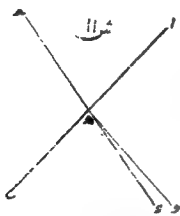


أعني اذا كان ا ب د + و د ب يكون المستقيم ا ب على استقامة ب وذلك لانه لو فرض خلاف ما ذكر وأن مستقيماً آخر مثل ب هـ هو الذي على استقامة د فانه يتحصل بمقتضى ما تقدم (١٥ نتيجة ٢) ان هـ د + و د ب = ٢ ن وبمقارنة هذه

التساوية بالتساوية المفروضة يعلم ان زاوية هـ د = ا ب د وهو محال وحيث فلا بد أن يكون ب هـ منطبقاً على ا

## نظريية

(١٧) اذا تقاطع مستقيمان فكل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متساويتين (شكل ١١)



فالزاويتان  $أ ه ب$  و  $د ه ب$  متساويتان لأن كل واحدة منهما تكمل زاوية واحدة  $أ ه د$  وكذا الزاويتان  $أ ه د$  و  $ز ه ب$  متساويتان لأن كل واحدة منهما مكمل لزاوية واحدة  $أ ه د$

عكس هذه النظرية حقيقي أى اذا وجدنا فى جهتي المستقيم اب ان الزاويتين  $أ ه ب$  و  $د ه ب$  المتقابلتين بالرأس متساويتان يكون المستقيم  $د ه$  على استقامة  $هـ$

لانه لو لم يكن كذلك لكان  $هـ$  و  $ش$  على استقامة  $هـ$  وحينئذ يجب أن تكون زاوية  $هـ$  = زاوية  $د ه ب$  وهذا لا يتأتى الا اذا كان  $هـ$  منطبقا على  $د ه$

## الفصل الثالث

### فى المثلثات

(١٨) المثلث هو جزء المستوى المحدود بثلاثة مستقيمت متقاطعة متنى (شكل ١٢)

يتركب المثلث من ستة أشياء وهى ثلاث زوايا وثلاثة أضلاع فالزوايا هى  $أ$  و  $ب$  و  $ج$  ورؤسها هى رؤس المثلث والأضلاع هى  $أ ب$  و  $ب ج$  و  $أ ج$  ويرمز لها عادة بالرموز  $أ$  و  $ب$  و  $ج$  لبيان انها متقابلة للزوايا  $أ$  و  $ب$  و  $ج$



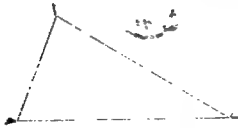
اذا تساوت الأضلاع الثلاثة من المثلث قيل له متساوى الأضلاع وان تساوى فيه ضلعان فقط سمى مثلثا متساوى الساقين ويسمى الضلع الثالث قاعدة

وان اختلفت أضلاعه قيل له مثلث مختلف الأضلاع واذا وجدت فيه زاوية قائمة قيل له مثلث قائم الزاوية وسمى الضلع المقابل للقائمة وتر

(٢) التحفة البهية (اول)

## نظريّة

(١٩) أى ضلع من أى مثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من فاضلهما (شكل ١٣) أعنى ان



$ب > ا + ج$  و  $ب < ا - ج$  - ان  
لأثبت ذلك يقال حيث كان  $ب$  مستقيماً  
بين النقطتين  $ا$  و  $ج$  فهو أصغر من كل خط  
منكسر مار بالنقطتين المذكورتين وبذلك ثبت ان

$ب > ا + ج$  و  $ب < ا - ج$  وبذلك يكون  $ا > ب + ج$  و  $ا < ب - ج$   
ثم يقال وحيث كان  $ا > ب + ج$  فاذا طرحنا  $ا$  من طرفي هذه المتباينة يحدث  
 $ا - ا > ب + ج - ا$  أو  $ب < ج - ا$  وهو المراد

## نظريّة

(٢٠) اذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى نهايت أحد أضلاعه بمستقيمين كان مجموع الضلعين الواصلين أصغر من مجموع الضلعين المحيطين بهما (شكل ١٤) أعنى ان



$ب + ج > ا + د$   
وذلك لأنه لو تم  $د$  على استقامته جهة  $د$  حتى يلاقى  
المستقيم  $ا$  فى نقطة  $هـ$  لحدث بتقتضى النظرية  
السابقة ان

$د > ا + هـ$  أو  $د > ب + هـ$  و  $ا > ب + هـ$   
وكذلك يحدث من المثلث

$ب > ا + د$  ان (١٩)  $ب > ا + د$

فاذا ضمت هاتان المتباينتان على بعضهما طرفاً على طرف أعنى جمع الطرف الاكبر على الطرف  
الاكبر والطرف الاصغر على الطرف الاصغر كان ضرورة مجموع الطرفين الاولين أكبر من مجموع  
الطرفين الآخرين ويحدث

$$د + ب + ج > ا + هـ + ا + د + ب + ج$$



وبطرح هـ من طرفي المتباينة نجدت

$$د + د > د + ا + هـ + ا + هـ \text{ أو } د + د > د + ا + هـ + ا + هـ$$

$$د + د > د + ا + هـ + ا + هـ \text{ أو } د + د > د + ا + هـ + ا + هـ$$

$$د + د > د + ا + هـ + ا + هـ \text{ وهو المطلوب}$$

تنبيه - من المعلوم ان هذه النظرية تكون حقيقة أيضا لو أخذت نقطة د على أحد أضلاع المثلث

## نظريّة

(٢١) في كل مثلث متساوي الساقين الزاويتان المقابلتان لساقيه تكونان متساويتين

(شكل ١٥) اذا كان  $ا = ب$  تكون

زاوية ب = زاوية د وللبهنة على ذلك

نضع بجانب المثلث ا ب د عين المثلث

مقابل في الوضع ا ب د ثم نطبق الشكل

ا ب د على الشكل ا ب د بحيث نضع

الزاويتين ا و ا المتساويتين على بعضهما

فتقع ضرورة نقطة د على ب ونقطة ب على د على مقتضى القرض وحينئذ ينطبق

د على ب (٦) وينطبق الشكلان على بعضهما وتكون زاوية ب = د وحيث

كانت ب = د فتكون زاوية ب = د وهو المطلوب

نتيجة - ينتج من ذلك أن المثلث المتساوي الاضلاع يكون متساوي الزوايا

## نظريّة

(٢٢) وبالعكس اذا تساوت زاويتان من مثلث يتساوى الضلعان المقابلان لهما ويكون

المثلث متساوي الساقين (شكل ١٥) اذا كانت زاوية ب = زاوية د يبرهن على أن

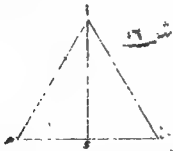
الضلع ا ب = الضلع ا د

ذلك يوضع بجانب المثلث ا ب د عين المثلث مقابل في الوضع ا ب د ثم نضع الشكل الثاني

على الاول بان يطبق الضلع  $\widehat{C}$  على مساويه  $\widehat{B}$  وحيث ان زاوية  $\widehat{C}$  أو  $\widehat{A}$  = زاوية  $\widehat{B}$   
فرضاً يأخذ الضلع  $\widehat{C}$  الاتجاه  $\widehat{B}$  وبعين هذا السبب يأخذ الضلع  $\widehat{A}$  الاتجاه  $\widehat{A}$   
وان تنطبق نقطة  $\widehat{A}$  على نقطة  $\widehat{A}$  وينطبق الشكلان على بعضهما انطباقاً تاماً ويكون  
 $\widehat{A} = \widehat{B}$  وحيث ان  $\widehat{A} = \widehat{B}$  هو عين  $\widehat{A}$  فيكون  $\widehat{A} = \widehat{B}$  وهو المطلوب  
نتيجة - يتبع من ذلك أن المثلث المتساوي الزوايا يكون متساوي الاضلاع أيضاً

## نظريّة

(٢٣) المستقيم المنصف لزاوية المثلث المتساوي الساقين المحصورة بين ساقيه يمر بنصف قاعدته



وبصنع معهما زاويتين متجاورتين متساويتين (شكل ١٦)  
إذا كانت زاوية  $\widehat{B} = \widehat{A}$  زاوية  $\widehat{A}$  يبرهن أولاً على  
أن  $\widehat{B} = \widehat{C}$  وثانياً على أن زاوية  $\widehat{B} = \widehat{A}$  زاوية  
 $\widehat{A}$

لذلك يدور الشكل  $\widehat{A}$  حول  $\widehat{A}$  لانهطبق على  $\widehat{A}$   
فن حيث ان زاوية  $\widehat{B} = \widehat{A}$  و  $\widehat{A}$  فرضاً يأخذ الضلع  $\widehat{A}$  الاتجاه  $\widehat{B}$  وحيث كان المثلث  
متساوي الساقين تقع نقطة  $\widehat{C}$  على نقطة  $\widehat{B}$  ولكون نقطة  $\widehat{D}$  ثابتة ينطبق  $\widehat{C}$  على  $\widehat{B}$   
ويكون أولاً  $\widehat{B} = \widehat{C}$  وثانياً زاوية  $\widehat{B} = \widehat{A}$  زاوية  $\widehat{A}$  وهو المطلوب  
تنبيه - المستقيم  $\widehat{AD}$  يسمى بالمستقيم المتوسط للمثلث المتساوي الساقين

## نظريّة

(٢٤) يتساوى المثلثان اذا وجد فيهما واحد من الامور الآتية

- أولاً - اذا تساوى من أحدهما زاوية والضلعان المحيطان بها النظائرهما من الثاني
- ثانياً - اذا تساوى من أحدهما ضلع وبجاورته من الزوايا النظائرهما من الثاني
- ثالثاً - اذا تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة كل لتظيره

الاول - اذا كانت زاوية  $\widehat{A} =$  زاوية  $\widehat{A}$  والضلع  $\widehat{AB} =$  الضلع  $\widehat{AB}$  والضلع  $\widehat{AC} =$   
الضلع  $\widehat{AC}$  يبرهن على تساوي باقي الاجزاء المتناظرة فيهما (شكل ١٧)

وذلك لانه اذا أجريت عملية تطبيق مماثلة لتلك التي أجريت بنقرة ٢١ ينطبق المثلثان على بعضهما ويتساويان

الثاني - اذا كان الضلع  $\overline{AB} = \overline{AC}$  الضلع  $\overline{AB}$  وزاوية  $\widehat{A} = \widehat{B}$  وزاوية  $\widehat{C}$  تساوي زاوية  $\widehat{B}$  يبرهن على تساوي الاجزاء

الباقية منها على التناظر (شكل ١٧)

وذلك لانه اذا أجريت عملية تطبيق مماثلة لتلك التي أجريت بنقرة ٢٢ ينطبق المثلثان على بعضهما

وتساوي فيهما باقى الاجزاء المتناظرة ويكونان متساويين

(تنبيهات) الاول - ما ذكرناه يقتضى أن الاشياء المفروض تساويها في المنطوق تكون موضوعة على ترتيب واحد فاذا لم يكن الامر كذلك لزم ادارة المثلث  $\overline{ABC}$  دورة كاملة قبل تطبيقه على الثاني

الثاني - الزوايا المتساوية في المثلثين المتساويين تقابل الاضلاع المتساوية

الثالث - اذا كان الضلع  $\overline{AB} = \overline{AC}$  الضلع  $\overline{AB}$  والضلع  $\overline{AC}$  والضلع  $\overline{BC} = \overline{BC}$  تساوي الزوايا المتناظرة فيهما ويكون المثلثان متساويين (شكل ١٨)

لبرهنة على ذلك نضع المثلث  $\overline{ABC}$  تحت

المثلث  $\overline{ABC}$  مقلوباً في الوضع بحيث يأخذ

الضلع  $\overline{AB}$  الوضع  $\overline{BC}$  والضلع  $\overline{AC}$

الوضع  $\overline{CB}$  ثم نصل  $\overline{AD}$  فالمثلث  $\overline{ABD}$

يصير اذن متساوي الساقين وبناء عليه تكون

زاوية  $\widehat{DAB} = \widehat{DCA}$  (٢١) وكذلك

المثلث  $\overline{ADC}$  يكون متساوي الساقين

ومنه ينتج أن زاوية  $\widehat{DAB} = \widehat{DCA}$  وبناء

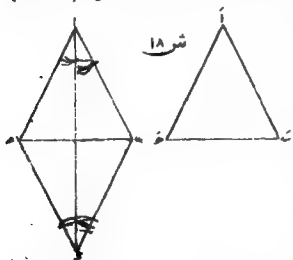
عليه تكون زاوية  $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$  ويكون المثلثان  $\overline{ABD}$  و  $\overline{ADC}$  متساويين

لتساوي الضلعين  $\overline{AB}$  و  $\overline{AC}$  والزاوية المحصورة بينهما المتطابرتان من الثاني (الاول)

تنبيه - اذا تصادف وقوع المستقيم  $\overline{AD}$  خارج الشكل  $\overline{ABC}$  بأن كان المثلثان منفرج

الزاوية فان الزاويتين  $\widehat{A}$  و  $\widehat{C}$  تكونان أيضاً متساويتين لانهما تكونان في هذه الحالة عبارة

عن الفرقين السكائين بين زوايا متساوية



## نظريّة

(٢٥) في أي مثلث الزاوية الكبرى يقابلها الضلع الأكبر وبالعكس (شكل ١٩)

أولاً - إذا كانت زاوية  $\angle A$  أكبر من زاوية  $\angle B$

يكون الضلع  $\angle A$  أكبر من الضلع  $\angle B$

لذلك يمتد نقطة  $A$  المستقيم  $AB$  بحيث تكون الزاوية

$\angle A$  تساوي الزاوية  $\angle B$  فيكون الضلع  $\angle A = \angle B$

$\angle B$  (٢٢) ويؤخذ من المثلث  $\angle A$  أن

$$\angle A > \angle B \text{ أو } \angle A < \angle B \text{ أو } \angle A = \angle B$$

ثانياً - إذا كان الضلع  $\angle B$  أكبر من الضلع  $\angle A$  تكون زاوية  $\angle A$  أكبر من زاوية  $\angle B$

وللبرهنة على ذلك يقال لو لم تكن زاوية  $\angle A$  أكبر من زاوية  $\angle B$  لكانت أماما مساوية لها أو

أصغر منها وفي الحالة الأولى يكون الضلع  $\angle B$  مساويا للضلع  $\angle A$  (٢٢) وهو مخالف للفرض

وفي الحالة الثانية يكون الضلع  $\angle B$  أصغر من الضلع  $\angle A$  (أولاً) وهو مغاير أيضاً للفرض

وبناء عليه يجب أن يكون الضلع  $\angle B$  أكبر من الضلع  $\angle A$  وهو المراد

## نظريّة

(٢٦) إذا تساوى ضلعان من مثلث نظيرين هما من مثلث آخر وكانت الزاوية المحصورة بين ضلعي

المثلث الأول أكبر من نظيرتهما من المثلث الثاني

يكون الضلع الثالث من المثلث الأول أكبر من

نظيره من المثلث الثاني (شكل ٢٠)

إذا كان الضلع  $\angle A = \angle B$  وكانت زاوية  $\angle A$  أكبر من

زاوية  $\angle A$  يكون الضلع  $\angle B < \angle C$

لذلك يرفع المثلث  $\angle A$  ويوضع على شمال المثلث  $\angle A$  بحيث ينطبق الضلع  $\angle A$

على مساويه  $\angle A$  ويأخذ المثلث الوضع  $\angle A$  ثم تنصف الزاوية الكلية  $\angle A$  بالمستقيم

$\angle A$  فيقع ضرورة داخل الزاوية الكبرى  $\angle A$  ثم يوصل المستقيم  $\angle A$  فالتثلثان الحادان

$\angle A$  و  $\angle A$  يكونان متساويين لأن قوسهما الضلع  $\angle A$  مشترك بينهما والضلع

$\angle A = \angle A$  والزاوية  $\angle A = \angle A$  بالتصنيف (٢٤ الأول)



وينتج من تساويهما أن الضلع  $ب هـ = هـ د$  ويؤخذ من المثلث  $هـ د$  أن

$$(١٩) \quad د > أ \quad \text{أو} \quad د > هـ + هـ \quad \text{أو} \quad د > ب \quad \text{وهو المراد}$$

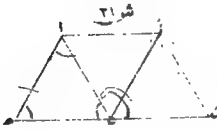
نتيجة - عكس هذه النظرية حقيقي أعني أنه إذا كان  $أ ب = أ ب$  ،  $أ ب = أ ب$  ،  
و  $ب < د < هـ$  تكون زاوية  $ب ا د < ب ا هـ$

لأنه لو لم يكن الأمر كذلك لكانت زاوية  $ب ا د$  أمساوية لزاوية  $أ$  أو أصغر منها ففي  
الحالة الأولى يكون الضلع  $ب = ب$  (٢٢) وفي الثانية يكون  $ب > ب$  وكلاهما  
مغاير للفرض فتكون أن زاوية  $ب ا د < أ$  وهو المطلوب

## نظرية

(٢٧) مجموع زوايا المثلث الداخلة يساوي زاويتين قائمتين (شكل ٢١) أعني أن

$$١ + ٢ + ٣ = ١٨٠$$



وللوصول إلى ذلك يتصور أن نأخذ المثلث  $أ ب د$  في الجهة  
 $ب د$  على مسطرة موضوعة على الضلع  $ب د$  إلى أن  
تأخذ نقطة  $د$  محل النقطة  $ب$  ومن حيث أن الالتقاء  
حاصل في آن واحد لجميع أجزاء المثلث لا يرتبطها ببعضها  
فإن نقطة  $د$  عندما تصل إلى الوضع  $ب$  تصل أيضا

نقطة  $ب$  إلى الوضع  $ب$  على بعد من نقطة  $ب$  مساو للبعد  $ب د$ . وكذا تصل نقطة  $أ$   
إلى الوضع  $أ$  على بعد منها مساو للبعد  $ب د$  ثم إذا وصل المستقيم  $أ أ$  فالمثلث الحادث  
 $أ ب د$  يكون مساويا للمثلث الأصلي  $أ ب د$  لأن فيهما الضلع  $أ ب$  مشترك بينهما والضلع  
 $أ ب = أ ب$  الضلع  $أ د$  فرضا والضلع  $أ أ = أ أ$  الضلع  $ب د$  وينتج من تساويهما أن زاوية  
 $أ ب ا$  المقابلة للضلع  $أ أ =$  زاوية  $ب ا د$  المقابلة للضلع  $ب د$  وحيث كانت زاوية  
 $أ ب د =$  زاوية  $د$  فرضا يكون مجموع الزوايا الثلاثة المتجاورة  $ب ا د + أ ب ا + أ ب د$   
مساويا لمجموع زوايا المثلث الداخلة أي  $د + د + أ$  وحيث كان المجموع الأول  
مساويا لزاويتين قائمتين (١٥ ثانيا) فيكون المجموع الثاني كذلك وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

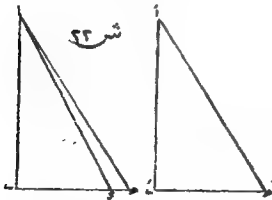
أولا - أنه إذا بدأ أحد أضلاع مثلث فان الزاوية الحادثة بين امتداده والضلع المجاور له مثل  
زاوية  $أ ب د =$  مجموع زوايا المثلث ساعدا المجاورة لها

ثانيا - مجموع زوايا المثلث الخارجة الحادثة بين امتداد أضلاعه الثلاثة والاضلاع المجاورة لها يساوي أربع قوائم وذلك لأن مجموع كل زاويتين متجاورتين موجودتين على كل رأس من رؤس المثلث الثلاثة مساو لقائمتين وحيث يكون مجموع الكل مساويا ٦ قوائم وبطرح مقدار الزوايا الداخلة أى قائمتين من ٦ قوائم يكون الباقي وهو مجموع الزوايا الخارجة فقط مساويا ٤ قوائم ثالثا - مجموع الزاويتين الحادتين من المثلث القائم الزاوية يساوي زاوية قائمة واذن فهما متممستان فإذا كان المثلث متساوي الساقين كان مقدار كل واحدة منهما نصف زاوية قائمة رابعا - اذا ساوت زاويتان من مثلث زاويتين اخرين من مثلث آخر تكون الزاوية الثالثة من الاول مساوية للثالثة من الثاني

خامسا - لا يمكن أن يوجد في أى مثلث الزاوية واحدة قائمة وزاوية واحدة منفرجة سادسا - مقدار كل زاوية من زوايا المثلث متساوي الاضلاع ثلث قائمتين أو ثلثا قائمة سابعا - يمكن الاكتفاء في تساوي المثلثات بتساوي ضلع واحد ومطلق زاويتين من احدهما لنظائرها من الثاني وحيث قد مثلثان قائما الزاوية يتساويان اذا ساوى من احدهما وتر زاوية دون القائمة أو ضلع وزاوية دون القائمة لنظائرها من الثاني

## نظريـة

(٢٨) يتساوى المثلثان القائم الزاوية اذا ساوى من أحدهما وتر وضلع لنظيريهما من الثاني (شكل ٢٢)



اذا كان الوتر  $AC = A'C'$  والضلع  $AB = A'B'$  يكون المثلثان  $ABC$  و  $A'B'C'$  متساويين والبرهنة على ذلك يرفع المثلث  $ABC$  ويطبق على المثلث  $A'B'C'$  بان يوضع الضلع  $AB$  على مساويه  $A'B'$  وحيث ان زاوية  $C$  تساوي زاوية  $C'$  بالقيام بأخذ الضلع  $BC$

الاتجاه  $BC$  وتقع نقطة  $C$  على نقطة  $C'$  انلوفرض خلاف ذلك لزم أن تقع داخلا أو خارجا عنها فإذا فرض وقوعها في نقطة  $D$  فيكون  $AC$  منطبقا على  $A'D$  ويكون المثلث  $ADC$



متساوي الساقين لان  $\angle ا = \angle اد$  وتكون اذن زاوية  $\angle د =$  زاوية  $\angle اد$  لكنهما بالتأمل نرى أن زاوية  $\angle د$  حادة لانها أصغر من قائمة (٢٧ ثالثاً) وزاوية  $\angle اد$  الخارجة عن المثلث  $ا ب د$  منفرجة لانها أكبر من قائمة (٢٧ أولاً) وتساويهما محال وماتبع هذا الا من فرض وقوع نقطة  $\gamma$  داخل نقطة  $\angle د$  وبمثل ذلك يبرهن على عدم امكان وقوعها خارجا عنها وحيث لا بد أن تقع عليها ينطبق المثلثان على بعضهما ويصيران متساويين وهو المطلوب

## الفصل الرابع

في المستقيمان المتعامدة والمائلة

- (٢٩) المستقيم العمودي على آخر هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين متساويتين  
 ينتج من هذا التعريف وعملاً كز بنرق ١٥ و ٢٣ ما يأتي  
 أولاً - ان من نقطة على مستقيم لا يمكن أن يقام المستقيم واحد عمودي عليه  
 ثانياً - ان كل مستقيم عمودي على آخر يكون الاخير عمودا عليه  
 ثالثاً - ان المستقيم المنصف لزاوية رأس المثلث المتساوي الساقين يكون عمودا على قاعدته  
 ويسمى ارتفاعه  
 (٣٠) المستقيم المائل على آخر هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين مختلفتين

## نظرية

(٣١) كل نقطة مفروضة خارج مستقيم يمكن أن ينزل منها عمود واحد عليه لا اثنان (شكل ٢٣)



وللبرهنة على ذلك عيّن نقطة  $\gamma$  المستقيم  $\angle د$  فيكون مع المستقيم  $ا ب$  زاويتين  $\angle د ا و$  و  $\angle د ب ا$  ان كانتا متساويتين كان هو العمود المطلوب والافتصّر تحرك المستقيم المذكور حول نقطة  $\gamma$  بحيث تبعد نقطة  $د$  شيئاً فشيئاً عن نقطة  $ا$  فيشاهد أن الزاوية الكبرى  $\angle د ا و$  تأخذ في النقص وأن الزاوية الصغرى  $\angle د ب ا$  تأخذ في الزيادة وحيث لا بد أن يوجد وضع للمستقيم المتحرك مثل  $\angle د$  تكون فيه الزاويتان المتجاورتان متساويتين ويكون هو العمود المطلوب

(٣) التصفه اليه (اول)

هذا ولو استمر المستقيم المتحرك على الحركة بعد وصوله الى الوضع  $\text{ح ه}$  يشاهد أن التساوي الذي كان حاصلين الزاويتين المتجاورتين قد اختل ومن ذلك يعلم أنه لا يوجد للمستقيم المتحرك الاوضاع واحد فريد تكون فيه الزاويتان المتجاورتان متساويتين وهو المطلوب

## نظريـة

(٢٢) اذا أنزل من نقطة خارج مستقيم عمود عليه وعمدة موائل يحدث

أولاً - أن العمود أصغر من كل مائل

ثانياً - ان المائلين المتساوي البعد عن موقع العمود يكونان متساويين

ثالثاً - ان المائل الذي اقترع عن موقع العمود بعداً أكبر فهو أكبر (شكل ٢٤)

الاول - يبرهن على أن العمود  $\text{د ب}$  > المائل  $\text{د ه}$

لذلك بعد العمود  $\text{د ب}$  على استقامته جهة  $\text{ب}$  ويؤخذ

منه البعد  $\text{د ب} = \text{البعد د ب}$  ويوصل  $\text{ه ط}$

فالثلث الحادث  $\text{ه د ب}$  يكون مساوياً للثلث  $\text{د ب ه}$

لوجود الضلع  $\text{ب ه}$  مشترك بينهما ولتساوي الضلع

$\text{د ب}$  للضلع  $\text{د ب}$  عملاً ولساواة الزاوية  $\text{د ب ه}$

زاوية  $\text{ه د ب}$  بالقيام وينتج من تساويهما ان الضلع

$\text{ه ط} = \text{الضلع د ه}$  لكنه يؤخذ من المثلث  $\text{د ه ط}$  أن

$$\text{د ب} + \text{أو د ب} + \text{د ب} > \text{ه ط} + \text{أو د ب} > \text{د ه} \text{ أو د ب} > \text{د ه}$$

الثاني - يبرهن على ان المائل  $\text{د و}$  يساوي المائل  $\text{د ه}$  اذا كان البعد  $\text{ب و}$  يساوي

البعد  $\text{ب ه}$

ولذلك يقال ان المثلثين  $\text{د ب ه}$  و  $\text{د ب و}$  متساويان لاشتراك الضلع  $\text{د ب}$  فيهما ولساواة

البعد  $\text{ب و}$  للبعد  $\text{ب ه}$  ولساواة الزاوية  $\text{د ب و}$  للزاوية  $\text{د ب ه}$  بالقيام ومن تساويهما

ينتج ان المائل  $\text{د و}$  يساوي المائل  $\text{د ه}$

الثالث - اذا كان البعد  $\text{ب ح}$  أكبر من  $\text{ب و}$  يكون المائل  $\text{د ح}$  أكبر من  $\text{د و}$

لذلك يوصل المستقيمان  $\text{و ط}$  و  $\text{ح ط}$  ويبرهن كما سبق على ان  $\text{و ط} = \text{د و}$  و  $\text{ح ط} = \text{د ح}$

وحيث كانت نقطة  $\text{و}$  داخل المثلث  $\text{د ح ط}$  يحدث (٢٠)

$$\text{و ط} + \text{د و} > \text{د ح} + \text{د و} \text{ أو د و} > \text{د ح} \text{ أو د و} > \text{د ح وهو المطلوب}$$

تنبيه - اذا وجد المثلان  $هـ$  و  $د$  في جهتي العمود فانه يؤخذ البعد  $ب$  و يساوى  
 البعد  $ب$  هـ فيكون البعد  $دو = هـ$  ويرهن كما سبق  
 (نتيجة ١) عكس القضايا السابقة تحقيق وبسبب البرهنة عليه  
 (نتيجة ٢) من نقطة خارجة عن مستقيم لا يمكن أن يداليه سوى مستقيمين متساويين  
 فائدة - العمود الفريد الذي يمكن مده من نقطة الى مستقيم يقدر به بعده هذه النقطة عن هذا  
 المستقيم

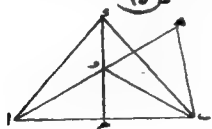
## الفصل الخامس

في المحل الهندسى

(٣٣) المحل الهندسى هو المحل الجامع لجميع النقط المتحدة الخاصة أو التابعة لقانون واحد وهو  
 اما أن يكون مستقيماً أو منحنياً أو سطحاً مستوياً أو منحنياً ولا تكلم الا على الخط المستقيم منها  
 وما عداه يأتي الكلام عليه في محله

### نظـرية

(٣٤) اذا أقيم عمود على وسط مستقيم محدود فكل نقطة من نقط هذا العمود تكون على بعدين  
 متساويين من نهايتي المستقيم وكل نقطة خارجة عنه تكون على بعدين مختلفين من نهايتي  
 المستقيم وأطولهما ما كان قاطعاً للعمود (شكل ٢٥)



الاول - اذا كان  $د$  عموداً على وسط  $أ ب$  ويرهن  
 على ان البعد  $د ب = البعد د أ$  ولذلك يقال حيث  
 كان المستقيمان  $د ب$  و  $د أ$  متساويين البعد  
 عن موقع العمود  $د$  فيكونان متساويين (٣٢ الثانى)

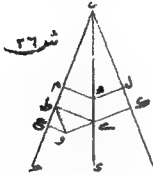
الثانى - يطلب البرهنة على أن  $هـ أ < هـ ب$  ولذلك يوصل  $و ب$  فيكون  $و ب = أ ب$  (الاول)  
 وحيث ان المثلث  $هـ ب و$  يؤخذ منه ان  $هـ ب > هـ أ$  و  $هـ ب و$  فلو وضعنا  $ب د$  عن  $ب$   
 ما يساويه وهو  $أ ب$  ينتج أن

$هـ ب > هـ أ$  و  $هـ ب > هـ أ$  و  $هـ ب > هـ أ$  وهو المطلوب

نتيجة - كل مستقيم تكون جميع نقطه متساوية البعد عن نهايتي مستقيم معلوم يلزم أن  
 يكون عموداً على وسطه

## نظرية

(٢٥) اذا نصفت زاوية بمستقيم تكون كل نقطة من نقطة على بعدين متساويين من ضلعيها وكل نقطة خارجة عنه تكون على بعدين مختلفين منهما وأطولهما القاطع للمستقيم المنصف (شكل ٢٦)



الاول - يطلب البرهنة على ان البعد  $هـ ل =$  البعد  $هـ م$  ولذلك يقال ان المثلثين  $ب ل هـ$  و  $ب م هـ$  القائمي الزاوية متساويان لوجود الوتر  $ب هـ$  مشترك بينهما ولساواة الزاوية  $ل ب هـ$  للزاوية  $هـ ب م$  فرضا وينتج من تساويهما  $هـ ل = هـ م$

الثاني - يبرهن على ان البعد  $و ل <$  و  $ع$  ولذلك ينزل العمود  $ع ط$  فيكون مساويا  $ع ل$  (الاول) فاذا وصل  $و ط$  نحصل  $و ط > ع ط$  أو  $و ط > و ل$  وحيث كان  $و ع$  عمودا على  $ب ح$  فيكون أصغر من المائل  $و ط$  وعليه يكون  $و ع > و ل$  أو  $و ل < و ع$

(نتيجة ١) كل مستقيم مار بين ضلعي زاوية وكانت كل نقطة من نقطة على بعدين متساويين من ضلعيها يكون متصفا للزاوية

(نتيجة ٢) المستقيمان المنصفان لزاويتين متكاملتين يكونان متعامدين

## الفصل السادس

### في الاشكال المحسنة

(٣٦) السطوح المستوية المحددة ببجمله مستقيمت متقاطعة منى تسمى اشكالا كثيرة الاضلاع أو مضلعات مستوية وأبسط هذه الاشكال هو المثلث وماله أربعة أضلاع يسمى شكلا رباعيا



وماله خمسة يسمى خماسيا وماله عشرة أضلاع يسمى ذا العشرة الاضلاع وهكذا فالشكل  $ا ب ح د هـ و$  (شكل ٢٧) يدل على شكل سداسي جميع زواياها بارزة أى فتحاتها داخل الشكل وأما (الشكل ٢٨) فانه يدل على شكل

سداسى احدى زواياها داخله بمعنى أن اقتراجها خارج الشكل فالشكل الاول يسمى شكلا محببا والثاني غير محبب فالشكل المحبب هو الذى اذا مده أى ضلع من أضلاعه يجعل الشكل كله فى احدى جهتيه بخلاف الشكل الغير المحبب فانه مد الضلع  $\delta$  مثلا على استقامته فانه يقسم الشكل الى جزأين كل جزء منهما فى جهة من جهتيه

(٢٧) المستقيمت اه و اد و اح الواصلة بين رؤس زوايا الشكل الغير المتجاورة تسمى اقطار الشكل فالثلث ليس له اقطار والشكل الرباعى له اثنان والخامس له خمسة والسداسى له تسعة

وعلى العموم اذا مر من زاوية ما كل عدد أضلاع شكل ما كان عدد اقطار مساويا  $\frac{\delta(\delta-3)}{2}$  وذلك لان الشكل الذى عدد أضلاعه  $\delta$  يتولد عنه اقطار واصله من رأسه عددها  $\frac{\delta(\delta-3)}{2}$  وبضرب هذا المقدار فى عدد الزوايا يتوصل الى العدد  $\frac{\delta(\delta-3)}{2}$  الا أنه يشاهد أن كل قطر منها محسوب مرتين واذن فبقسمة المقدار السابق على ٢ يتوصل الى  $\frac{\delta(\delta-3)}{4}$  وهو مقدار الاقطار التى يمكن وجودها فى أى شكل فهو القانون العمومى الذى يعرف منه مقدار اقطار أى شكل فأقطار الشكل دى العشر من ضلعاها

$$٢٠ \frac{(٢٠-٣)}{٤} = ١٧٠ \text{ قطرا}$$

نظـرية

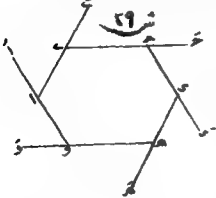
(٢٨) مجموع الزوايا الداخلة لى شكل كثير الاضلاع يساوى من القوائم بقدر عدد أضلاعه الاثنين مضروبا فى اثنين

وللبرهنة على ذلك يتوصل اقطاره الخارجة من رأس واحدة (شكل ٢٧) فينقسم بذلك الشكل الى مثلثات بقدر عدد اضلاعه الاثنين لان كل ضلع من أضلاع الشكل مرسوم عليه مثلث ماعدا الضلعين المحيطين برأسه وحيث انه تقدم بمره ٢٧ أن مجموع زوايا المثلث يساوى زاويتين قائمتين فيحتوى الشكل اذن على قوائم بقدر ضعف عدد المثلثات أو بقدر عدد أضلاعه الاثنين مضروبا فى اثنين وهو المطلوب

نتيجة - ينتج مما ذكر أن مقدار الزوايا القائمة الموجودة فى أى شكل رباعى مساوية الى  $\frac{\delta(\delta-2)}{2}$  أو  $\frac{\delta(\delta-2)}{2}$  أى أربع قوائم وزوايا الشكل الخامس تعادلت قوائم والسداسى ثمانية وهكذا

## نظريّة

(٣٩) اذا مدت أضلاع أى شكل مهما كان عدداً أضلاعه في جهة واحدة كان مجموع الزوايا الخارجة المتكونة من كل ضلع وامتداد الضلع المجاور له مساوياً بأربع قوائم (شكل ٢٩)



وللهيئة على ذلك يلاحظ أنه باضافة كل زاوية خارجة مثل  $\hat{a}$  الى مجاورتها يتصل من مجموعها زاويتان قائمتان وأن هذا المجموع مكرر مرات بقدر عدد الاضلاع أعني ان مجموع الزوايا الداخلة للشكل والخارجة عنه مساوياً من القوائم بقدر ضعف عدد أضلاعه فاذا طرح من هذا المجموع مقدار مجموع الزوايا القائمة الموجودة

في زوايا الشكل الداخلة المساوية الى ضعف عدد أضلاعه الاثنان كان الباقي وهو  $2 \times 2$  أو ٤ قوائم يدل على مجموع الزوايا القائمة المشتمل عليها مجموع الزوايا الخارجة وهو المراد تنجس - أى شكل كثير الاضلاع لا يمكن أن يحتوى على أكثر من ثلاث زوايا واحدة لانه لو احتوى على أكثر من ذلك لوجد في زواياه الخارجة أربع زوايا بالاقلى يكون مجموعها أكبر من أربع قوائم وهو محال

(٤٠) (تعريف) كثيرا الاضلاع المتحدان في عدد الاضلاع يكونان متساويين اذا ترابعا من مثلثات متساوية متحدة العدد ومنشابهة وضعاً أعني اذا وضع أحدهما على الآخر انطبق عليه انطباقاً تاماً

## نظريّة

(٤١) يتساوى كثيرا الاضلاع المتحدان في عدد الاضلاع اذا تساوت منهما الاضلاع والزوايا المتناظرة بقطع النظر عن معرفة تساوى ضلع والزوايتين المجاورتين له من أحدهما لظايرها من الثاني (شكل ٣٠)



مثلاً اذا تساوت الزوايا  $\hat{a}$  و  $\hat{b}$  و  $\hat{c}$  من كثير الاضلاع  $\hat{a}$  و  $\hat{b}$  و  $\hat{c}$  من كثير الاضلاع  $\hat{a}$  و  $\hat{b}$  و  $\hat{c}$  من كثير الاضلاع المتحدان الاول في عدد الاضلاع وكانت الاضلاع

$\hat{a}$  و  $\hat{b}$  و  $\hat{c}$  من الاول مساوية على الترتيب لظايرها  $\hat{a}$  و  $\hat{b}$  و  $\hat{c}$  من الثاني

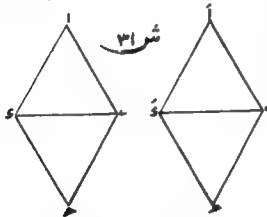


يقطع النظر عن معرفة تساوى الضلع هـ د لنظيره د هـ وعن تساوى الزاويتين د و هـ المحيطتين بالضلع الاول لنظائرها د و هـ من الثاني يلزم أن يكون كثيرا الاضلاع متساويين والبرهنة على ذلك نضع كثيرا الاضلاع الثاني على الاول بحيث ينطبق الضلع آ هـ على مساويه ا هـ ومن تساوى الزاوية آ لنظيرتها ا ينطبق الضلع آ ب على مساويه ا ب وتقع النقطة ب على ب وتساوى الزاوية ب لنظيرتها ب يقع الضلع ب ح على مساويه ب ح وتقع نقطة ح على نقطة ح وكذا كرر ينطبق الضلع ح د على ح د وحيث ان نهاية الضلع د هـ قد انطبقت على نهاية الضلع د هـ فينطبق الشكلان على بعضهما انطباقا تاما ويكونان متساويين

نتيجة - ينتج من ذلك ان كثيرا الاضلاع الذى عند أضلاعه د يعين تعيينا تاما اذا علم منه معالم قدرها ٢-٣ وذلك لانه يحتاج الى معالم من أضلاعه قدرها ٢-٣ ومن زواياه قدرها ٢-٣ وحيث ان المثلث يعين معالم قدرها ٣-٣-٣ أى بثلاثة معالم والشكل الرباعي بخمسة وانحاسى بسبعة وهكذا

### نظـرية

(٢٢) تساوى الشكلان الرباعيان اذا تساوى فيهما زاوية والاضلاع الاربعة كل انظيره (شكل ٣١)



مثلا اذا فرض في الشكلين الرباعيين  
 $AB \parallel CD$  و  $A'B' \parallel C'D'$  ان زاوية  $A = A'$   
 زاوية  $A = A'$  والضلع  $AB = A'B'$  والضلع  
 $BC = B'C'$  والضلع  $CD = C'D'$  والضلع  $DA = D'A'$   
 يكونان متساويين

والبرهنة على ذلك بمعة القطران ب و ب و د

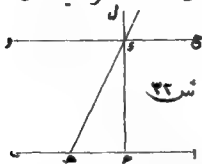
فيحدث من ذلك المثلثان  $ABD$  و  $A'B'D'$  المتساويان لتساوى زاوية والضلعين المحيطين بها من أحدهما لنظائرها من الثاني وينتج من تساويهما تساوى الضلع ب و للضلع ب د وحيث يكون المثلثان  $BCD$  و  $B'C'D'$  متساويين لتساوى أضلاعهما المتناظرة فيهما وبناء عليه يكون الشكلان الرباعيان متساويين لتركبهما من مثلثات متساوية متحدة العدد ومتماثلة وضعاً

## الفصل السابع

### في المستقيمات المتوازية

(٤٣) المستقيمان المتوازيان هما مستقيمان موجودان في مستو واحد ولا يمكن تلاقيهما مهما امتدّا

فإذا فرض مستقيم مثل  $AB$  (شكل ٣٢) وأقيم من إحدى نقطة  $C$  عمود عليه  $CD$  ومذ من نقطة  $D$  إحدى نقط المستقيم  $AB$  بحيث يكون قاطعاه والمستقيم  $AB$  قاطعاً لزاويتين الحادتين  $C$  و  $D$  من المستقيم القاطع  $CD$  والمستقيمين  $AB$  و  $CD$  مجموعهما يساوي قائمة (٢٧ ثالثاً) إذ اتقرر هذا وفرض تحريك المستقيم  $CD$  حول نقطة  $D$



بحيث تبعد نقطة  $D$  شيئاً فشيئاً عن نقطة  $C$  يلاحظ أن الزاوية  $C$  مع نقصان تمامتها  $D$  فإذا استمر المستقيم المتحرك في حركته فإنه لابد أن يأتي له وضع مثل  $D$  و تكون فيه زاوية  $C$  قائمة لكن هذا لا يتأتى إلا إذا انعدمت زاوية  $C$  كلية بواسطة تباعد نقطة  $D$  عن نقطة  $C$  إلى غير نهاية وحينئذ فيقال للمستقيمين في هذه الحالة أنهما متوازيان

ويمكن إعادة ما ذكر بخصوص المستقيم  $CD$  الكائن على شمال العمود  $CD$  على المستقيم المذكور إذا كان على يمينه واذن فكل مستقيم مار بنقطة  $D$  ومقاطع مع  $CD$  زاوية دون القائمة في إحدى جهتيه يمكن اعتباره كأنه أحد أوضاع المستقيم المتحرك  $CD$  قبل وصوله إلى الوضع  $C$  أعني أنه لابد أن يصنع امتداده مع المستقيم  $AB$  زاوية تكون تمامية للزاوية التي يصنعها مع العمود  $CD$  وحينئذ فيقال على وجه العموم أنه إذا أقيم عمود على مستقيم من إحدى نقطه ومذ من نقطة أخرى منه مائل عليه فإن المائل إذا امتد يقطع العمود

### نظريّة

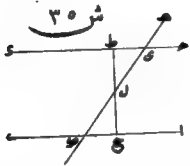
(٤٤) كل نقطة مفروضة خارج مستقيم يمكن أن يمد منها مستقيم واحد مواز له لا اثنان (شكل ٣٣)



رابعا - الزاويتان المجاورتان للقاطع الداخلتان هما مثل الزاويتين ح ع هـ و ا ع ع  
والزاويتين ب ح ع و د ع ع  
خامسا - الزاويتان المجاورتان للقاطع الخارجتان هما مثل الزاويتين و ع د و ب ح ع  
والزاويتين ح ع د و ا ع هـ

## نظريّة

(٤٦) اذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فالزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتان (شكل ٣٥)



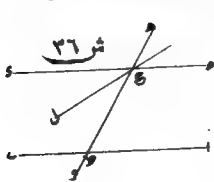
وبرهان ذلك تصف البعدى ك نقطة ل ثم تنزل منها العمود ل ح على المستقيم ا ب ويمد على استقامته فيكون ضرورة عمودا على ح د (٤٤ نتيجة ٣) فالثلثان القائم الزاوية الحادان يكونان متساويين لان فيهما الوتر ل ح ل = الوتر ل ك عملا والزاوية ل ح ط = الزاوية

ح ل ك لتقابلهما بالرؤس وينتج من تساويهما (٣٧ سابعا) ان الزاوية ل ح ط = الزاوية ح ل ك وهو المطلوب

تنبيه - بناء على ما تقدم تسهل البرهنة على تساوى الزاويا المتبادلة الخارجة والمتناظرة وعلى تكامل الزاويا المجاورة للقاطع الداخلة والخارجة .

## نظريّة

(٤٧) اذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتين يكون



المستقيمان متوازيين (شكل ٣٦) أى اذا كانت زاوية ح ط = زاوية ا ط ح يكون المستقيم ح د موازيا للمستقيم ا ب

وللبرهنة على ذلك يقال لو فرض أن ح د غير مواز للمستقيم ا ب بل ان الموازى للمستقيم آخر مثل ح ل كانت زاوية ل ح ط = زاوية ا ط ح = ح ط وهو

محال لان زاوية ل ح ط جزء من زاوية د ح ط وما نشاهد الا من فرض أن الموازي للمستقيم  
 اب هو غير د وهو المطلوب  
 تنبيه - يعرف مثل ذلك على موازي المستقيمين المذكورين اذا كانت الزوايا المتبادلة الخارجة  
 متساوية أو كانت الزوايا المتناظرة كذلك أو كانت الزوايا المجاورة للقاطع داخله أو خارجة  
 مكمله لبعضها مثني

## نظريـة

(٤٨) المستقيمت المتوازية المحصورة بين مستقيمين متوازيين تكون متساوية (شكل ٣٧)



أعني ان المستقيمين هو ح ط المتوازيين المحصورين  
 بين المستقيمين ا ب و د المتوازيين أيضا يكونان  
 متساويين

والبرهنة على ذلك بعد المستقيم ح و قائمتان الحادتان  
 ه و ح و ح و ط يكونان متساويين لان الضلع

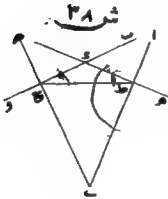
ح و مشترك فيهما ولان زاوية ه و ح = زاوية ح و ط لكونهما متبادلتين داخليتين  
 بالنسبة للمستقيمين المتوازيين ه و ح ط والقاطع ح و (٤٦) ولان زاوية ه و ح و =  
 زاوية ح و ط لكونهما متبادلتين داخليتين أيضا بالنسبة للمستقيمين ا ب و د المتوازيين  
 ولعين القاطع ح و وينتج من تساوي ه و ح = الضلع ح ط وهو المراد  
 نتيجة - اذا كان المستقيمان المتوازيان ه و ح ط عمودين على كلا المستقيمين  
 المتوازيين فيكونان متساويين أيضا لانهما يصيران متوازيين ولما كان العمود المحصور بين  
 المتوازيين يقدر به البعد المحصور بينهما أمكن أن يقال على وجه العموم ان المستقيمين المتوازيين  
 هما على أبعاد متساوية في جميع امتدادهما

تنبيه - عكس هذه النظرية حقيقي دائما أعني انه اذا كان المستقيمان ه و ح ط  
 متساويين ومتوازيين يكون المستقيمان ا ب و د الحاصران لهما متوازيين (شكل ٣٧)  
 والبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين ه و ح و ح ط متساويان لان الضلع ح و مشترك فيهما  
 والضلع ه و ح و ح ط فرضا وحيث انهما متوازيان والمستقيم ح و قاطع لهما تكون الزاويتان  
 المتبادلتان ه و ح و ح و ح ط متساويتين وينتج من تساويهما ان زاوية ه و ح و = زاوية ح و ط  
 وحيث ان هاتين الزاويتين هما متبادلتان داخليتان يكون المستقيمان ا ب و د متوازيين (٤٧)

نتيجة - إذا كان المستقيمان هـ و ح ط المتساويان والمتوازيان عمودين على أحد المستقيمين المقروطين فيكونان ضرورة عمودين على الثاني وحيث يمكن أن يقال أن كل مستقيمين على أبعاد متساوية في جميع امتدادهما يكونان متوازيين

### نظريّة

(٤٩) المستقيمان العمودان على ضلعي زاوية لا يكونان متوازيين (شكل ٣٨)

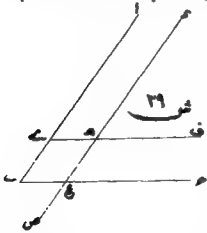


إذا فرضت زاوية  $\angle A$  وكان المستقيم مـ هـ عموداً على الضلع  $AB$  و  $CD$  عموداً على  $AB$  فلا يكون المستقيمان مـ هـ و  $CD$  متوازيين ولابرهنة على ذلك يوصل المستقيم  $CD$  فنحيط كل واحد من الزاويتين  $\angle M$  و  $\angle C$  و دون القائمة فيكون مجموعهما أقل من قائمتين وحيث فلا يكون  $CD$  موازياً  $AB$  وهو المراد

### نظريّة

(٥٠) الزاويتان اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية تكونان امام متساويتين أو مكملتين

لبعضهما ففتكونان متساويتين إذا كانت أضلاعهما المتناظرة متحدة الجهة متشابهة أو متضادتها وتكونان مكملتين لبعضهما إذا كان غير ذلك (شكل ٣٩)



وللابرهنة على ذلك يقال إذا فرضنا أن زاويتي  $\angle A$  و  $\angle C$  هـ هـ أضلاعهما المتناظرة متوازية ومتحدة الجهة متشابهة تكونان متساويتين

لأنه لو لم يكن المستقيم هـ هـ على استقامته حتى يقابل المستقيم  $AB$  في نقطة  $E$  لكانت زاوية هـ هـ  $\angle C$  زاوية  $B$  بالتناظر وتساوى زاوية هـ هـ  $\angle F$  أيضاً وحيث تكون زاوية هـ هـ  $\angle F$  = زاوية  $B$

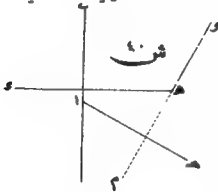
والزاويتان  $\angle A$  و  $\angle C$  هـ هـ  $\angle F$  اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية ومتضادّة في الجهة تكونان متساويتين

لأن زاوية  $\angle A$  = زاوية هـ هـ  $\angle F$  = زاوية  $B$

وأما الزاويتان  $\delta$  و  $\epsilon$  ، و  $\alpha$  و  $\beta$  اللتان أضلاعهما المتناظرة متوازية واثنتان منهما متعامدان في الجهة والاثنان الآخران متضادان فيها فتكونان متكاملتين  
لان زاوية  $\delta$  و  $\epsilon$  مكملتان زاوية  $\delta$  و  $\epsilon$  أولساويتها  $\alpha$  و  $\beta$  وهو المطلوب  
تتبعه - اذا تعذر معرفة الزاوية الواقعة بين مستقيمين لعدم تقاطع ضلعيها على ورق الرسم  
واريد معرفة الزاوية المذكورة فانه تؤخذ نقطة بين ضلعي الزاوية المذكورة ويرسم منها  
مستقيمان موازيان لضلعي الزاوية فالزاوية الحادثة بينهما تكون مساوية للزاوية المطلوبة

### نظـرية

(٥١) الزاويتان اللتان أضلاعهما المتناظرة متعامدة تكونان اما متساويتين أو متكاملتين  
لبعضهما (شكل ٤٠)



أي اذا فرضنا أن المستقيم  $\delta$  و  $\epsilon$  عمود على  $\alpha$  و  $\beta$  المستقيم  
و  $\delta$  و  $\epsilon$  عمود على  $\alpha$  تكون الزاويتان الحادتان  $\delta$  و  $\epsilon$   
وهم احدهما مساوية لزاوية  $\alpha$  والاخرى مكملتها  
وللبرهنة على ذلك يتصور دوران الزاوية  $\delta$  و  $\epsilon$  حول  
نقطة  $\delta$  بمقدار زاوية قائمة ويبدون تغيير مقدارها  
فالوضعان الاخيران اللذان يأخذهما المستقيمان  $\delta$

و  $\epsilon$  و يتعامدان على وضعهما الاولين وحينئذ يكونان موازيين للمستقيمين  $\alpha$  و  $\beta$   
وتكون الزاوية الحادثة بينهما مساوية لزاوية  $\alpha$  أو مكملتها وهو المراد  
تتبعه - يؤخذ من هذه النظرية والسابقة عليهما أن المثلثين اللذين أضلاعهما المتناظرة  
متوازية أو متعامدة تكون زواياهما المتناظرة متساوية فقط

وذلك انه لو فرضنا الزاويتان المتناظرتين أي المحصورة بين الاضلاع المتوازية المتناظرة أو المتعامدة  
كذلك بحروف  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  فانه لا يمكن أن يفرض بين هذه الزوايا  
سوى أحد هذه الامور الثلاثة وهي

$$(١) \quad \alpha + \beta = 180^\circ, \quad \gamma + \delta = 180^\circ, \quad \alpha = \gamma \text{ و } \beta = \delta$$

$$(٢) \quad \alpha + \beta = 180^\circ, \quad \gamma + \delta = 180^\circ, \quad \alpha = \delta \text{ و } \beta = \gamma$$

$$(٣) \quad \alpha = \beta, \quad \gamma = \delta, \quad \alpha = \gamma \text{ و } \beta = \delta$$

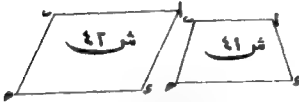
أما الامران الاولان فهما باطلان لانه ينتج من كل منهما ان مجموع زوايا المثلثين أكبر من  $180^\circ$  قوائم  
وحيثئذ يكون الثالث حقيقيا

## الفصل الثامن

### في الاشكال المتوازية الاضلاع

(٥٢) شبه المخرف هو شكل رباعي فيه ضلعان متوازيان فقط يسميان قاعدتيه مثل ا ب ح د

(شكل ٤١)



(٥٣) متوازي الاضلاع هو شكل رباعي

أضلاعه المتقابلة متوازية مثل ا ب ح د

(شكل ٤٢)

وأنواعه المستطيل وهو متوازي أضلاعه المتجاورة مختلفة وزواياه قائمة مثل ا ب ح د

(شكل ٤٣)

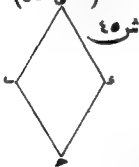


والمربع وهو متوازي أضلاعه

متساوية وزواياه قائمة مثل ا ب ح د

(شكل ٤٤)

والعين وهو متوازي أضلاعه متساوية وزواياه غير قائمة مثل ا ب ح د (شكل ٤٥)



(٥٤) ينتج مما ذكر في مجبث المتوازيات النتائج الآتية

أولا - ان الزوايا المتقابلة من متوازي الاضلاع تكون متساوية لان

أضلاعهم متوازية ومتضادة في الجهة معني (٥٠)

ثانيا - ان كل زاويتين موجودتين على ضلع واحد من متوازي

الاضلاع هما متكاملتان لانهما زاويتان داخلتان مجاورتان للقطاع

ثالثا - ان الاضلاع المتقابلة من متوازي الاضلاع تكون متساوية (٤٨)

رابعا - أن قطر متوازي الاضلاع يقسمه الى مثلثين متساويين (٤٨)

### نظريّة

(٥٥) كل شكل رباعي يكون متوازي الاضلاع اذا توفر فيه أحد الامور الآتية وهي

أولا - اذا تساوت زواياه المتقابلة

ثانيا - اذا كان كل زاويتين منه موجودتين على نهايتي ضلع واحد متكاملتين

ثالثا - اذا تساوت الاضلاع المتقابلة منه

رابعا - اذا تساوى طول احدى ضلعي متقابلين منه

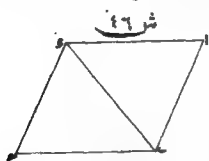


(برهان الاول) يقال حيث كان كل زاويتين متقابلتين من متساويتين وكان مجموع زواياه الداخلة مساويا  $\epsilon$  قوائم يكون مجموع كل زاويتين موجودتين على نهايتي ضلع واحد مساويا قائمتين وهذا يستلزم توازي أضلاعه المتقابلة

(برهان الثاني) داخل في برهان الاول

(برهان الثالث) يقال ان تساوى أضلاعه المتقابلة يستلزم تساوى المثلثين اللذين يحدان من من وصل أحده قطريه لتساوى الاضلاع الثلاثة فيهما وينتج من تساوى المثلثين المذكورين تساوى الزوايا المتقابلة من الشكل الرابع وحيث ذفيرجع الامر الى الاول

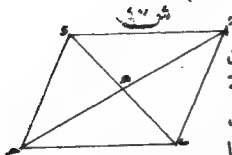
(برهان الرابع) يقال اذا كان الضلع  $AB$  يوازي وبساوى الضلع  $CD$  (شكل ٤٦)



يكون المثلث  $ABC$  مساويا للمثلث  $DCB$  لان الضلع  $BC$  مشترك فيهما والضلع  $AB = DC$  فرضا وحيث كان هذان الضلعان متوازيين والمستقيم  $BC$  قاطعاهما تكون زاوية  $ABC =$  زاوية  $DCB$  لكونهما متبادلتين داخليتين وينتج من تساويهما أن زاوية  $ACB$  تساوى زاوية  $ACD$  وحيث كانتا متبادلتين داخليتين فيكون المستقيمان  $AD$  و  $BC$  متوازيين وهو المراد بانه

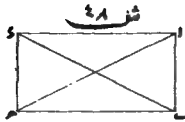
### نظريّة

(٥٦) قطرا متوازي الاضلاع نصفان بعضهما (شكل ٤٧)



وللبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين  $AED$  و  $CEB$  متساويان لان فيهما الضلع  $AE = CE$  الضلع  $BE = DE$  من خاصية الشكل (٥٤ ثالثا) وفيهما زاوية  $DAE =$  زاوية  $ECB$  لانهما متبادلتان داخلتان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين  $AD$  و  $BC$  وللقاطع لهما  $AC$  وفيهما أيضا

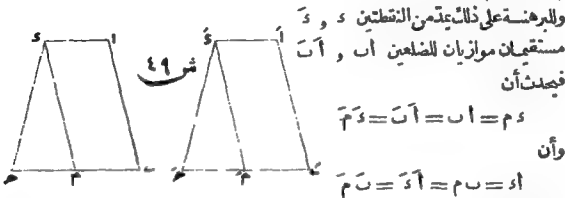
زاوية  $AED =$  زاوية  $CEB$  لكونهما متبادلتين داخليتين أيضا بالنسبة لعين المستقيمين المتوازيين وللقاطع لهما  $BD$  ومن تساويهما ينتج أن الاضلاع المقابلة للزوايا المتساوية هي متساوية أعني أن  $AD = BC$  و  $AB = DC$  وهو المطلوب



(نتيجة ١) قطرا المستطيل متساويان (شكل ٤٨)  
لأن المثلثين  $أب س$  و  $ا د س$  فهما ضلعان والزوايا  
المحصورة بينهما من أحدهما مساوية لتظايرهما من الآخر  
(نتيجة ٢) قطرا المربع والمعين نصفان بعضهما  
ويكونان متعامدين ولا حاجة للبرهنة على ذلك لسهولته

## نظـرية

(٥٧) شبيه المخرف يكونان متساويين متى تساوت فيهما الاضلاع الاربعة النظرية  
(شكل ٤٩)



وحينئذ يكون  $م = م = م$  ويكون المثلثان  $د م$  و  $س م$  متساويين لتساوي  
أضلاعهم الثلاثة المتناظرة وينتج من تساويهما أن زاوية  $د = د$  وحينئذ فيشبه المخرف  
المذكوران يدخلان في النظرية العمومية لتساوي الاشكال الرباعية عمرة ٣٧  
(تنبيهان) الاول - يتساوى متوازي الاضلاع اذا تساوى من أحدهما زاوية والضلعان  
الحيطان بهما النظايرهما من الثاني ويتساوى العيان اذا تساوى من أحدهما زاوية وضلع نظيريهما  
من الثاني

وأما المستطيلان فيتساويان اذا تساوى من أحدهما ضلعان متجاوران لنظيريهما من الثاني  
وأما المربعان فيتساويان اذا تساوى ضلع من أحدهما ضلعان من الآخر  
ولا حاجة للبرهنة على هذه الامور لسهولتها

الثاني - تقدم (٤١) نتيجة أن أي شكل رباعي يتعين عموما بمعرفة خمسة أشياء منه وقد علم  
الآن أن شبه المخرف يتعين بأربعة فقط ومتوازي الاضلاع بثلاثة والمعين والمستطيل بأثنين  
والمربع بواحد

## الفصل التاسع

### تسميات

- ١ - المطاوب رسم زاوية متممة لزاوية معلومة
- ٢ - المطاوب رسم زاوية مكمل لزاوية معلومة
- ٣ - المطاوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين لزاويتين متكاملتين هما متعامدان
- ٤ - المطاوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين لزاويتين متقابلتين بالرؤس يكونان على استقامة واحدة
- ٥ - المطاوب البرهنة على أن مجموع قطري أى شكل رباعي محدب أصغر من مجموع أضلاعه وأكبر من نصف مجموعها
- ٦ - المطاوب البرهنة على أنه إذا فرضت نقطة داخل مثلث ووصل منها إلى رؤسه بمستقيمات كان مجموع هذه المستقيمات أصغر من مجموع أضلاع المثلث وأكبر من نصف مجموعها
- ٧ - المطاوب البرهنة على أنه إذا وصل من رأس مثلث إلى وسط قاعدة بمستقيم كان هذا المستقيم أصغر من مجموع الضلعين المحيطين
- ٨ - المطاوب البرهنة على أن مجموع المستقيمات الواصلة من رؤس المثلث إلى أواسط أضلاعه يكون أصغر من مجموع أضلاعه وأكبر من نصف مجموعها
- ٩ - المطاوب البرهنة على أن الأعمدة الثلاثة المقامة على أواسط أضلاع المثلث تتقاطع في نقطة واحدة
- ١٠ - المطاوب البرهنة على أنه إذا أنزل من نهايتي قاعدة مثلث متساوي الساقين عمودان على الساقين كان هذان العمودان متساويين
- ١١ - المطاوب البرهنة على أن المستقيمات المنصفة لزوايا المثلث الثلاث تتقاطع في نقطة واحدة
- ١٢ - المطاوب تعيين المستقيم المنصف لزاوية متكونة من مستقيمين لا يمكن تقاطعهما في حدود الرسم
- ١٣ - المطاوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين لزاويتين أضلاعهما المتناظرة متوازية يكونان امامتوازيين أو متعامدين ومثلهما المنصفان لزاويتين أضلاعهما المتناظرة متعامدة
- ١٤ - المطاوب البرهنة على أن الأعمدة الثلاثة النازلة من رؤس المثلث على أضلاعه تتقاطع في نقطة واحدة
- ١٥ - المطاوب البرهنة على أنه إذا مد من رؤس أى شكل رباعي مستقيمات موازية لأقطاره فإنه يتشكل من ذلك شكل متوازي الأضلاع يكون مكافئاً لضعف الشكل الرباعي الأول

- ١٦ - المطلوب إيجاد المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن مستقيمين متوازيين معلومين  
 ١٧ - المطلوب إيجاد المحل الهندسي للنقط الموضوعة على بعد معين من مستقيم معلوم  
 ١٨ - المطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين منتصفى ضلعى مثلث يكون موازيا للضلع الثالث مساويا لنصفه  
 ١٩ - ما نوع الشكل الرباعى الذى يحدث اذا وصل بين أواسط أضلاع المعين بمستقيمتين  
 ٢٠ - المطلوب البرهنة على أن المستقيمتين الممتدة من زوايا شكل رباعى يتكون عنها شكل رباعى آخر تكون زواياها المتقابلة متكاملة

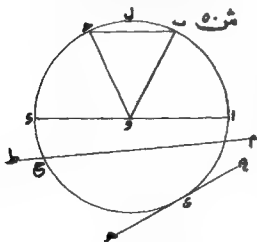
## الباب الثانى

فى محيط الدائرة وما يتعلق به

### الفصل الاول

#### تعاريف

(٥٨) محيط الدائرة هو خط منحني جميع نقطه على ابعاد متساوية من نقطة داخله تسمى مركزا (شكل ٥٠)



فالخط المنحنى ا ب ل ح هـ يسمى محيط الدائرة ونقطة و تسمى مركزا وبعبارة أخرى محيط الدائرة هو المحل الهندسي للجامع لجميع النقط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة تسمى مركزا

والدائرة هي جزء المستوى المحاط بهذا الخط المنحنى كل مستقيم مار بالمركز ومتمته بنقطة من المحيط يسمى نصف قطر مثل و ا وكل مستقيم مار بالمركز ومتمته بنقطتين

من المحيط يسمى قطرا فبناء على هذا وعلى تعريف محيط الدائرة تكون أنصاف الاقطار متساوية والاقطار كذلك

القوس هو جزء من المحيط مثل  $ا ب د$  ووتر القوس هو المستقيم الواصل بين نهايتيه مثل المستقيم  $ب د$  الموتر للقوس  $ب د$  غير أن هذا المستقيم يعتبر وتر القوس آخر  $ب ا ه د$  وحينئذ فكل وتر يقابله قوسان مجموعهما يساوي المحيط

القطعة هي جزء من الدائرة محصور بين قوس ووتره مثل القطعة  $ب د$  ولما كان الوتر  $ب د$  يقابله قوسان فيقابلهما أيضاً قطعتان مجموعهما مساو للدائرة

متى أطلق لفظ القوس أو القطعة لا يفهم من ذلك إلا القوس الصغير أو القطعة الصغيرة لأنهما المقصودان عند عدم التقييد

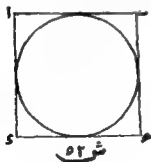
القطاع هو جزء من الدائرة محصور بين قوس ونصف القطرين المارين بنهايتيه مثل  $ا ب د$  قاطع الدائرة هو المستقيم الذي يقطع محيطها في نقطتين مثل المستقيم  $م ط$  المماس هو المستقيم الذي لا يترك مع محيط الدائرة إلا في نقطة واحدة تسمى نقطة التماس مثل المستقيم  $د ه$  ونقطة  $د$  هي نقطة التماس

الزاوية المركزية هي الزاوية التي يكون رأسها بالمركز وضلعاهانصفاً قطرين مثل الزاوية  $د و د$  الزاوية المرسومة داخل الدائرة والمحيطية هي ما كانت رأسها على المحيط وضلعاهما وتران مثل زاوية  $ا ب د$  من (شكل ٥١)



المثلث المرسوم داخل الدائرة هو ما كانت رأسه على المحيط وأضلاعه أوتاراً مثل  $ا ب د$  ويقال على وجه العموم لا يشكل أنه مرسوم داخل الدائرة متى كانت رأسه على المحيط وأضلاعه أوتاراً فيه محيط الدائرتين التماسان هما اللذان لا يشتركان إلا في نقطة واحدة فقط

الزاوية المرسومة خارج الدائرة هي ما كانت رأسها خارج الدائرة وضلعاهامماسين لمحيطها مثل زاوية  $ب$  (شكل ٥٢)

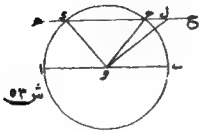


الشكل المرسوم خارج الدائرة ما كانت أضلاعه مماسة لمحيطها مثل  $ا ب د$  ويقال للدائرة في هذه الحالة أنها مرسومة داخل الشكل

## نظريّة

(٥١) قاطع الدائرة لا يمكن أن يقطع محيطها في أكثر من نقطتين (شكل ٥٣)

أعني أن القاطع هـ هـ لا يمكن أن يقطع محيط دائرة و في غير النقطتين ح و د  
 انلوفرز أنه يقطع المحيط في نقطة ثالثة ل و وصلنا  
 المستقيمت ول و د و و لازم أن تكون هذه  
 المستقيمت كلها متساوية لانها اذن أنصاف أقطار لدائرة  
 واحدة لرورها جميعها بالمرکز ولا تنها كل منها يقطع من نقط  
 المحيط وهو باطل كما تقدم (٣٢ برهان الثالث نتيجة ٢)  
 وما نشأ هذا الا من فرض أن المستقيم يقطع المحيط في نقطة ثالثة وبنايت المطلوب  
 تنبيه - يشاهد من الشكل المذكور أن الضلع  $د > د + و$  أو  $د > د + و$  أو  $د > د + و$   
 أعني أن أكبر المستقيمت التي يمكن رسمها داخل الدائرة هو القطر



## نظريّة

(٦٠) قطر الدائرة يقسمها الى قسمين متساويين  
 وذلك لانه لو طبق جزء الدائرة العلوى على جزءها السفلى حول اقطر فانهما يطبقان على بعضهما  
 كمال الانطباق انلوفرز خلاف ذلك بأن كان بعض نقط أحد الجزأين وقع داخلا أو خارجا تكون  
 ضرورة باء هذه النقط عن المركز غير متساوية وهو مخالف لتعريف الدائرة وبناء عليه فلا بد من  
 حصول الانطباق التام  
 وهذه نظرية يستفاد منها تساوى الدائرتين المرسومتين بنصفي قطر من متساويين لانه اذا وضع  
 مركز أحدهما على مركز الاخرى فانه لابد من انطباق جميع نقط محيطيهما على بعضهما تماما

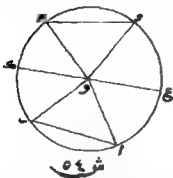
## الفصل الثاني

في الاوتار والاقواس

## نظريّة

(٦١) في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية الاقواس المتساوية أو اوتارها متساوية وبالعكس  
 أي ان الاوتار المتساوية أقواسها متساوية (شكل ٥٤)

مثلاً في دائرة و اذا كان القوس  $أب =$  القوس  $ح د$  يكون الوتر  $أب =$  الوتر  $ح د$   
وبالعكس اذا كان الوتر  $أب =$  الوتر  $ح د$  يكون القوس  
 $أب =$  القوس  $ح د$



وللبرهنة على الشق الاول من هذه النظرية يمدن نقطة  
ك وسط القوس  $ب د$  القطر  $ك ع$  ثم يطبق نصف  
المحيط  $ك ح د ع$  على نصف المحيط  $ك ب أ ع$  فيثبت ان  
نقطة  $ك$  هي وسط القوس  $ح د$  تقع نقطة  $ح$  على

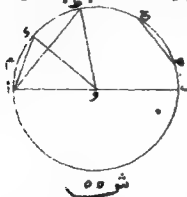
نقطة  $ب$  وحيث ان القوس  $ح د =$  القوس  $ب أ$  تقع نقطة  $د$  على نقطة  $أ$  وحينئذ  
ينطبق الوتر  $ح د$  على الوتر  $ب أ$  لاشتراكهما في نقطتين ويكونان متساويين

وللبرهنة على الشق الثاني يقال اذا وصلت أنصاف الاقطار  $و أ$  و  $و ب$  و  $و د$  و  $و ح د$   
المثلثان  $و د ح$  و  $و ب أ$  المتساويان لتساوي أضلاعهما الثلاثة المتناظرة وينتج من تساوي  
المثلثين المذكورين تساوي الزاويتين  $د و ح$  و  $ب و أ$  فاذا انطبق نصف المحيط  $ك ح د ع$   
على النصف الآخر  $ك ب أ ع$  فالمثلثان  $ح د و$  و  $ب أ و$  ينطبقان على بعضهما ويتحد  
الوتران  $ح د$  و  $ب أ$  وبناء عليه يتساوى القوسان  $ح د$  و  $ب أ$  وهو المراد

تنبيه - الشق الثاني من هذه النظرية لا يكون حقيقياً الا اذا كان كل واحد من القوسين  
في آن واحد إما أصغراً أو أكبر من نصف المحيط

### نظريــــــــــــــــة

(٦٢) في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية القوس الاكبر يكون وتره أكبر وبالعكس أي ان  
الوتر الاكبر يكون قوسه أكبر وهذا اذ لم يتجاوز القوس  
نصف المحيط والا كان عكس ذلك (شكل ٥٥)



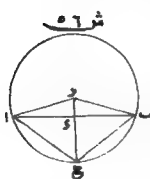
وللبرهنة على ذلك يؤخذ القوس  $أ ب$  مساوياً للقوس  
هـ ح الاصغر فيكون الوتر  $أ د$  مساوياً للوتر هـ ح (٦١)  
ثم يوصل  $أ و$  و  $د و$  و  $ط و$  فالمثلثان الحادئان  $أ و د$   
و  $أ و ط$  فهما الضلع  $أ و$  مشترك والضلع  $و د =$  و  $ط$

لكنهما حيث كانت زاوية  $أ و ط$  أكبر من زاوية  $أ و د$  يكون الضلع  $أ ط$  أكبر من الضلع  $أ د$   
أو أكبر من المساوي له هـ ح وهو المراد

وإذا كان الوتر أطأ أكبر من الوتر هـ هـ يكون القوس أمط أكبر من القوس هـ هـ انلو  
فرض خلاف ذلك فاما أن يكون القوس أمط مساويا للقوس هـ هـ أو أصغر منه فان كان  
الاول يكون الوتر أط مساويا للوتر هـ هـ وهو خلاف الفرض وان كان الثاني يكون الوتر أط  
أصغر من الوتر هـ هـ وهو المطلوب

### نظـرية

(٦٣) نصف القطر العمودى على وتر ينصفه وينصف قوسه أيضا (شكل ٥٦)



أعنى إذا كان نصف القطر و ح عمودا على الوتر ا ب يكون

ا د = ب د والقوس ا ح = القوس ب ح

وللبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين و د ب و د ا القائمي الزاوية

متساويان لوجود الضلع و د مشترك بينهما ولتساوى الوتر و ب

بالوتر و ا (٢٨) ومن تساويهما ينتج أن الضلع ا د = الضلع

ب د ثم اذا وصل الوتران ب ح و ح ا فالتثلثان د ب ح

و ا ح د يكونان متساويين لاشتراك الضلع د ح فهما ولتساوى الضلع د ب بالضلع د ا

كما سبق ذكره ولتساوى زاوية ب د ح بزاوية ا د ح وينتج من تساوى المثلثين أن الضلع ا ح

يساوى الضلع ب ح ومن تساويهما يكون القوس ا ح = القوس ب ح وهو المطلوب

تنبيه - يعلم مما ذكر أن المستقيم و ح متوفر فيه أربعة أمور وهي مرورها بالمركز وبمنتصف

الوتر وبمنتصف القوس وكونه عمودا على الوتر وتحقيق وجود امرين من هذه الامور الاربعة يستلزم

تحقيق الامرين الاخرين فيقال للمستقيم العمودى على وسط وترانه يمر بالمركز وبمنتصف القوس

وهكذا

### نظـرية

(٦٤) في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية الاوتار المتساوية ابعادها عن المركز متساوية والاوتار

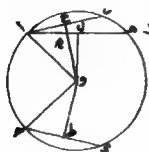
المتقابلة ابعادها عن المركز مختلفة وأطولها هو أقربها من المركز (شكل ٥٧)

أعنى إذا كان الوتر ا ب = الوتر ح د يكون العمود و ح مساويا للعمود و ط وإذا كان الوتر ا هـ

أكبر من الوتر ح د يكون العمود و ل أصغر من العمود و ط



(برهان الاول) يوصل  $وا$  و  $ود$  فالثلثان القائما الزاوية  $وحا$  و  $وطح$  متساويان



لان فيهما الوتر  $وا = الور$  و  $الضلع عا = الضلع حط$  و  $و$  (٦٣) وينتج من تساويهما أن  $ع = وط$

(برهان الثاني) يؤخذ الوتر  $اب$  مساويا للوتر  $د$  ثم يقال حيث كان  $ول$  عمودا على  $اه$  فيكون  $ود$  ما تلا عليه وحينئذ يكون  $ول > ود$  أو  $ول > وح$  وهو المراد

نتيجة - يسهل البرهنة على عكس هذه القضية أي اذا تساوى بعدا وترين أو أكثر عن المركز تكون الاوتار متساوية واذا اختلفت أبعادها تكون مختلفة وأقصرهما ما كان بعده عن المركز أكبر

### نظريّة

(٦٥) كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمكن أن يمر بها محيط دائرة واحد الاثنان (شكل ٥٨)



(برهان الاول) يوصل المستقيمان  $اب$  و  $اح$  ثم يقيم العمودان  $د$  و  $هـ$  على منصفى الوترين  $اب$  و  $اح$  فينقاطعان في نقطة و لان العمودين المقامين على مستقيمين متقاطعين يتقاطعان (٤٤) وتكون نقطة و مركز المحيط دائرة يمر بالنقط

الثلاثة المقروضة لان ابعادها  $وح$  و  $وا$  و  $وب$  عن نقطة و متساوية

(برهان الثاني) يقال لو فرض امكان مرور محيط آخر بالنقط الثلاثة المقروضة فان مركزه لابد وأن يوجد على كلا العمودين  $د$  و  $هـ$  على المقامين على وسط الوترين (٦٣)  $اب$  و  $اح$  ولما كان هذان العمودان لا يمكن أن يتقاطعا الا في نقطة واحدة يكون مركز المحيط الثاني هو عين مركز الاول وحيث ان كل واحد منهما يجب أن يمر بالنقط الثلاثة  $ا$  و  $ب$  و  $ج$  فيكون نصف قطريهما واحدا وحينئذ فيتحدا معا ويصيران محيطا واحدا

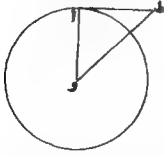
(نتيجة ١) محيطا الدائرتين لا يمكن أن يتقاطعا في أكثر من نقطتين لانهما لو اشتركا في ثلاث نقط فانهما يتحدان معا ويصيران محيطا واحدا

(نتيجة ٢) اذا وصل المستقيم  $ب$  و  $ح$  واقام العمود  $ل$  على وسطه فانه لابد وان يمر بالمركز (٦٣) وحينئذ فالاعددة الثلاثة المقامة على أواسط أضلاع مثلث تقاطع في نقطة واحدة تكون مركزا لمحيط الدائرة الذي يمر برؤسه

## الفصل الثالث

في خواص المماس وعمود المماس

(٦٦) المستقيم العمودي على نهاية نصف قطر يكون مماساً لمحيط الدائرة أي لا يشترك مع المحيط إلا في نقطة واحدة وبالعكس (شكل ٥٩)



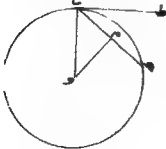
(برهان الأول) يقال لو فرض اشتراكهما في نقطة ثانية مثل ط ووصل منها المستقيم وط لكان ما تلا على أط ويكون وط أكبر من وا وهذا يستلزم أن تكون نقطة ط خارجة عن المحيط (برهان الثاني) يقال حيث أن أط لا يشترك مع المحيط إلا في نقطة ا فكل نقطة بخلافها مثل ط موجودة عليه تكون خارجة عن المحيط ويكون وط < وا وحينئذ فالبعد وا يكون أصغر من الأبعاد التي يمكن مدها من نقطة و الى المستقيم أط فيكون عموداً على أط وهو المطلوب

(نتيجة ١) من أي نقطة مثل ا مفروضة على محيط الدائرة لا يمكن أن يمد المماس واحد لاثنان وذلك لأنه لا يمكن من النقطة المذكورة إقامة عمود واحد أط على نصف القطر وا (نتيجة ٢) المستقيمان المماسان لمحيط دائرة و الممدودان من نهايتي قطر واحد يكونان متوازيين لانهما عمودان على مستقيم واحد

(نتيجة ٣) المستقيمان المتوازيان والمماسان لمحيط دائرة يكون المستقيم المار بنقطتي تماسهما قطراً أي ماراً بالمركز

### تطبيقات

(٦٧) مماس محيط الدائرة في نقطة ما يمكن اعتباره كأنه نهاية لاوضاع المستقيم القاطع المار بهذه النقطة (شكل ٦٠)



أعني ان المماس ب ط لمحيط الدائرة و في نقطة ب يمكن اعتباره كأنه نهاية لاوضاع القاطع ب ح المار بنقطة تماس ب وللبهنة على ذلك يقال اذا انزل العمود وم على الوتر ح ب ثم فرض تحركه هذا الوتر حول نقطة ب بحيث تقرب نقطة ح شيئاً فشيئاً من نقطة ب فان العمود وم يأخذ في الازدياد شيئاً فشيئاً

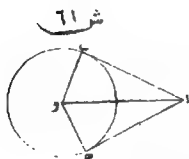
وحينئذ فعندما تتحد نقطة  $ح$  بنقطة  $ب$  ينطبق العمود  $وم$  على  $وب$  ويحدد الوتر بالمماس  
ويثبت المطلوب

فائدة - يمكن ان يستنتج مما ذكره تعريف عام لمماس أى منحني فيقل ان مماس أى منحني في  
نقطة ما هو نهاية الالوضاع التى يأخذها قاطع مار بنقطة التماس يتحرك حولها بحيث تقرب نقطة  
تقاطعه الثانية بالمنحني شيئاً فشيئاً من الاولى

## نظريــــــــــــــــة

(٦٨) اذا امتد من نقطة خارجة عن محيط دائرة مماسان له فجزأهما المحصوران بين النقطة  
المفروضة ونقطتي التماس يكونان متساويين أعني ان

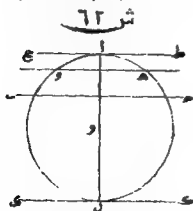
$$ا ب = ا ح \text{ (شكل ٦٨)}$$



والبرهنة على ذلك يوصل  $وب$  و  $وح$  فيكونان عمودين  
بالتناظر على  $ا ب$  و  $ا ح$  (عكس ٦٦) ثم يوصل  $وا$   
فالثلثان  $الحاذئان$   $ا ب$  و  $ا ح$  والقائم الزاوية  
متساويان لاشترك الوتر  $او$  فيهما ولتساوى الضلع  
 $وح$  للضلع  $وب$  وينتج من تساويهما ان  $ا ب = ا ح$  وهو المراد

## نظريــــــــــــــــة

(٦٩) المستقيمان المتوازيان يحصران بينهما من المحيط قوسين متساويين (شكل ٦٩)  
فإذا فرضنا ان المستقيمين  $ح ب$  و  $ه د$  متوازيان نقول  
ان القوس  $ح ه =$  القوس  $د ب$



والبرهنة على ذلك يتم من نقطة  $و$  القطر  $وا$  عمودا  
عليهما فيحصل بمقتضى ما سبق (٦٣) ان قوس  $ا ح =$   
قوس  $ا ب$  وان قوس  $ا ه =$  قوس  $ا د$  وبطرح  
التساوية الثانية من الاولى يحدث  $ح ه = د ب$   
أما اذا كان أحد المتوازيين مماسا للمحيط مثل  $ح ط$  فإنه

يوصل نصف القطر  $وا$  فيصير عمودا على كلا المتوازيين ويصير القوس  $ح ا$  مساويا للقوس  $ا ب$

(٦) القفص البهيه (اول)

واذا كان المستقيمان المتوازيان مماسين للمحيط فان المستقيم الواصل بين نقطتي تماسهما يكون قطرا (٦٦ نتيجة ٣) وهو يقسم محيط الدائرة الى قسمين متساويين (٧٠) عمود المنحنى في نقطة ما هو العمود على المماس المار بهذه النقطة وينتج من هذا التعريف ان أعمدة نقط محيط الدائرة هي انصاف أقطاره

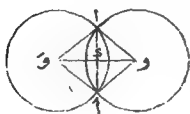
## الفصل الرابع

في أوضاع الدائرة

### نظرية

(٧١) اذا اشتراك محيطا دائرتين في نقطة خارجة عن المستقيم الواصل بين المركزين يلزم ان يشتركا في نقطة أخرى مماثلة للاولى بالنسبة لعين المستقيم الواصل بين المركزين (شكل ٦٣)

شكل ٦٣



أي اذا اشتراك المحيطان و و في نقطة أ الخارجة عن المستقيم و و الواصل بين المركزين يلزم ان يشتركا في نقطة أخرى مماثلة لنقطة أ بالنسبة للمستقيم و و للبرهنة على ذلك ينزل من نقطة أ العمود أ أ على و و ويؤخذ البعد أ أ مساويا أ أ فتسمى نقطة أ الحادثة مماثلة لنقطة أ بالنسبة للمستقيم و و

ثم اذا واصل و أ و أ فهذان المستقيمان يكونان متساويين لانهما مائلان متساويي البعد بالنسبة لنقطة أ موقع العمود و و حينئذ نجعل الدائرة التي مركزه و ونصف قطره و أ يمر بنقطة أ كما أنه يمر بنقطة أ

وكذا لو واصل و أ و أ كان هذان المستقيمان متساويين أيضا ويكون محيط الدائرة التي مركزه و ونصف قطره و أ يمر بنقطة أ وحينئذ تكون نقطة أ مشتركة بين المحيطين (نتيجة ١) اذا لم يشتركا محيطا دائرتين الا في نقطة واحدة بأن كانا تماسين فان نقطة التماس لا توجد الا على المستقيم الواصل بين المركزين وذلك لانه لو وجدت خارجة عنه للزم وجود نقطة أخرى مشتركة بين المحيطين وهو مغاير للقرص

(نتيجة ٢) اذا اشتراك محيطا دائرتين في نقطتين موجودتين على المستقيم الواصل بين المركزين

فانهما يتحددان معا وذلك لانهما في هذه الحالة يكونان متحدين في القطر وحينئذ فيكون مركزهما واحدا ونصف قطرها واحدا أيضا

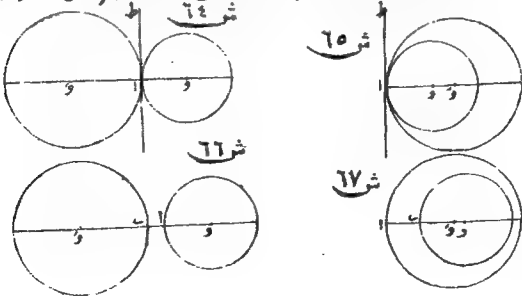
(نتيجة ٣) اذا اشتراك محيطا دائرتين في نقطتين احدهما على المستقيم الواصل بين المركزين والاخرى خارجة عنه فانهما يتحددان معا وذلك للزوم اشتراكهما في نقطة ثالثة مماثلة للنقطة الثانية

### نظريــــــــــــــــة

(٧٢) اذا اشتراك محيطا دائرتين في نقطتين فان المستقيم الواصل بين المركزين يكون عمودا على وسط الوتر المشترك بينهما (شكل ٦٣) والبرهنة على ذلك يقال من المعلوم أن هاتين النقطتين لا يمكن أن يكونا على المستقيم الواصل بين المركزين (٧١ نتيجة ٢) بل تكونان خارجتين عنه وحيث ان نقطة و على بعدين متساويين من نقطتي ا و آ فتوجد على العمود القائم على وسط آآ ومثلها نقطة و و حينئذ فالمستقيم و و عمود على وسط آآ وهو المراد فائدة - محيطا الدائرتين الموجودان في مستوا واحد لا يمكن أن يكون لهما بالنسبة لبعضهما سوى خمسة أوضاع فقط وهي

أولا - اما أن يشتركا في نقطتين ويقال لهما في هذه الحالة متقاطعين (شكل ٦٣) ثانيا - اما أن يشتركا في نقطة واحدة فقط بمعنى أن يكونا متماسين وفي هذه الحالة يكون أحد المحيطين خارجا عن الآخر أو داخل فيه ويقال المحيطي الدائرتين مماسان خارجا أو داخلا (شكل ٦٤ و ٦٥)

ثالثا - اما أن لا يكون لهما نقط مشتركة وفي هذه الحالة يكون أحد المحيطين اما خارجا عن الآخر أو داخل فيه ويسمى المحيطان متباعدان في الخارج أو في الداخل (شكل ٦٦ و ٦٧)



## نظريية

(٧٣) اذا مر من نال بالحرف  $\delta$  للبعدين مركزى محيطى دائرتين وبالزمرين  $\sigma$  و  $\sigma'$  لنصفى قطريهما يقال

أولاً - اذا تباعد المحيطان فى الخارج يكون  $\delta < \sigma + \sigma'$

ثانياً - اذا تماسا فى الخارج يكون  $\delta = \sigma + \sigma'$

ثالثاً - اذا تقاطعا يكون  $\delta > \sigma + \sigma'$  و  $\delta < \sigma - \sigma'$

رابعاً - اذا تماسا فى الداخل يكون  $\delta = \sigma - \sigma'$

خامساً - اذا تباعدا فى الداخل يكون  $\delta > \sigma - \sigma'$

(برهان الاول) يقال من المعلوم ان البعد  $\delta$  الكائن بين المركزين (شكل ٦٦) مركب من نصفى القطرين  $\sigma$  و  $\sigma'$  ومن المسافة  $ab$  وحينئذ يكون  $\delta < \sigma + \sigma'$

(برهان الثانى) يقال من المعلوم ان نقطة تماس محيطى الدائرتين موجودة على المستقيم الواصل بين المركزين وحينئذ يكون هذا المستقيم مركباً من نصفى القطرين فقط أعنى يكون  $\delta = \sigma + \sigma'$  (شكل ٦٤)

(برهان الثالث) يقال من المعلوم انه متى تقاطع دائرتان فان نقطتى التقاطع تكونان خارج البعدين المركزين وحينئذ فالثلث  $WOA$  يؤخذ منه ان  $\delta > \sigma + \sigma'$  و  $\delta < \sigma - \sigma'$  (شكل ٦٣)

(برهان الرابع) يقال من المعلوم ان نقطة تماس محيطى دائرتين فى الداخل تكون على المستقيم الواصل بين المركزين وحينئذ يكون نصف القطر الاصغر جزءاً من نصف القطر الاكبر ويكون  $\delta = \sigma - \sigma'$  (شكل ٦٥)

(برهان الخامس) يقال اذا تباعد محيطا دائرتين فى الداخل فان نصف القطر الاكبر يكون مركباً من البعدين المركزين ومن نصف القطر الاصغر ومن بعد آخر  $ab$  وحينئذ يكون  $\delta > \sigma + \sigma'$  (شكل ٦٧)

## نظريية

(٧٤) عكس هذه القضايا الخمسة حقيقى وطريقة البرهنة عليها واحدة مثلاً اذا كان البعد بين المركزين أصغر من التفاضل الكائن بين نصفى القطرين يكون محيطا الدائرتين

متبايعدين في الداخل والبرهنة على ذلك يقال ان لم يكونا متبايعين في الداخل لكنا اما متبايعين في الخارج أو متبايعين خارجاً أو داخلأً ومتقاطعين وحيث ان قانون البعدين المركزين في كل واحد من هذما الاحوال مخالف للقرض كان المحيطان متبايعين في الداخل ضرورة وهو المطلوب وعلى هذا يقلس الباقي

## الفصل الخامس

في مقادير الزوايا

(٧٥) قبل التكلم على مقادير الزوايا نذكر ما يأتي وهو من المعادى  
أولاً - انه لقياس أى كمية يبحث عن نتيجة تقديرها بأخرى من نوعها معتبرة وحدة وهذه النتيجة تسمى نسبة فعلى هذا اذا اريد قياس مستقيم معلوم فانه يبحث عن النسبة الكائنة بينه وبين الوحدة التى من جنسه  
ثانياً - اذا قيل ان النسبة بين مستقيمين معاويين هى كالنسبة بين عددين صحيحين مثل ٧ و ١٣ مثلاً فانه يفهم منها انحصار مستقيم ثالث ٧ مرات فى احدهما و ١٣ مرة فى الثانى وان هذا المستقيم الثالث هو مقياس مشترك بين هذين المستقيمين وبناء على ذلك اذا اريد تعيين النسبة بين أى مستقيمين فانه يجب البحث عن مقياس مشترك بينهما ثم يقسم عدد مرات انحصاره فى احدهما على عدد مرات انحصاره فى الثانى كما سنذكره

### مسئلة

(٧٦) المطلوب ايجاد المقياس المشترك بين مستقيمين معلومين (شكل ٦٨)  
اذا كان المستقيمان المعلومان هما  $أ ب$  و  $ح د$  فيصنع  
فان اجزى عليهم عملية مماثلة للعملية التى تحصلت فى الشكل ٦٨  
عند ايجاد القاسم المشترك الاعظم بين عددين  
فيقال نطبق أصغرهما  $ح د$  على الأكبر  $أ ب$  عدد مرات صحيحة بقدر انحصاره فيه ولنقرض  
ان عدد ٣ هو عدد مرات الانحصار من ابتداء نقطة  $أ$  الى نقطة  $هـ$  وان  $هـ ب$  هو الباقي  
فيحصل ان

$$أ ب = ٣ ح د + هـ ب \quad (١)$$

ثم نطبق بعد ذلك الباقي هـ على المستقيم الأصغر حـ كما تقدم فنفرض ان حـ قد احتوى على الباقي هـ اربع مرات صحيحة فاذا الباقي فـ فيحصل

$$حـ = ٤ هـ + فـ \quad (٢)$$

ثم نطبق هذا الباقي الثاني فـ على الباقي الاول هـ كما ذكر من ابتداء نقطة هـ الى نقطة حـ ونفرض انه بقى باق ثالث جـ فيحدث

$$هـ = فـ + جـ \quad (٣)$$

وأخيرا نطبق جـ على فـ ونفرض ان حصاره فيه أربع مرات بدون باق فيحدث

$$فـ = ٤ جـ \quad (٤)$$

ثم اذا ابدل في المتساوية (٣) فـ بمقدار من المتساوية (٤) يحدث

$$هـ = ٤ جـ + جـ = ٥ جـ$$

ثم اذا ابدل في المتساوية (٢) كل من هـ و فـ بمقدار بهما التاجين يحدث

$$حـ = ٢٠ جـ + ٤ جـ = ٢٤ جـ$$

وأخيرا اذا ابدل في المتساوية (١) كل من حـ و هـ بمقدار بهما الاخيرين يحدث

$$ا = ٧٢ جـ + ٥ جـ = ٧٧ جـ$$

وعلا ذكر ينتج

أولا - ان الباقي الاخير جـ هو المقياس المشترك بين المستقيمين ا ب و حـ  
ثانيا - حيث كان هذا المقياس المشترك محصورا ٧٧ مرة في المستقيم الاول و ٢٤ مرة في الثاني كانت النسبة بين هذين المستقيمين المعالومين هي كالنسبة بين ٧٧ و ٢٤ وتبين على هذه الصورة  $\frac{٧٧}{٢٤}$  أو  $\frac{٢٤}{٧٧}$  فالصورة الاولى تدل على ان النسبة بين ا ب و حـ هي عين النسبة بين العددين ٧٧ و ٢٤ وأما الصورة الثانية فتدل بالعكس على ان النسبة بين حـ و ا ب هي عين النسبة بين العددين ٢٤ و ٧٧

تنبيه - المقياس المشترك الذي علم ليس المقياس المشترك الوحيد بين هذين المستقيمين بل جميع قواسم هذا المقياس تكون ضرورة مقاييس مشتركة لهما ضرورة ان حصارها فيهما راضية صحيحة وعلى العموم متى وجد مقياس مشترك بين خطين كان لهما مقاييس مشتركة كثيرة جدا تعلم بواسطة قسمة هذا المقياس الى انصاف واثلاث وارباع وهكذا أو أكبر ولخدم هذه المقاييس يقال له المقياس المشترك الاعظم



(٧٧) كل خطين مستقيمين يوجد لهما مقياس مشترك يقال لهما مستقيمان متناسبان وكل مستقيمين لم يكن بينهما مقياس مشترك يقال لهما غير متناسبين الا انه كلما ظهر باق وطبق على الباقي الذي قبله مراراً فانه لابد أن يتوصل من وإلى العمل الى باق صغير جداً غير محسوس بحيث يمكن اعتباره كلاً شيئاً وبناء عليه فيمكن اعتبار أي مستقيمين كأنهما متناسبان دائماً أعني أنه يوجد بينهما مقياس مشترك سواء كان هذا المقياس حقيقياً أو تقريبياً

(٧٨) حيث ان أي قوسين من دائرة واحدة أو من دوائر متساوية يمكن انطباقهما على بعضهما فبناء عليه يمكن اجراء ما قيل في المقياس المشترك بين مستقيمين على أي قوسين من دائرة واحدة أو من دوائر متساوية واذا نك فكل قوسين من هذا القبيل يمكن أن يوجد بينهما دائماً مقياس مشترك اما حقيقياً أو تقريبياً

## نظريّة

(٧٩) في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية الاقواس المتساوية تكون زواياها المركزية متساوية وبالعكس أي اذا كانت الزوايا المركزية متساوية تكون أقواسها كذلك (شكل ٧٩)



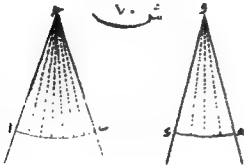
أعني اذا كان القوس  $AB =$  القوس  $CD$  تكون زاوية  $AOB$  تساوي زاوية  $COD$  وكذا اذا كانت الزاوية المركزية  $AOB$  تساوي الزاوية المركزية الاخرى  $COD$  يكون قوس  $AB =$  قوس  $CD$

(برهان الاول) يوصل الوتران  $AB$  و  $CD$  فن حيث كان القوسان  $AB$  و  $CD$  متساويين يكون وترهما كذلك وحينئذ فالثلثان  $AOB$  و  $COD$  يكونان متساويين لتساوي أضلاعهما الثلاثة وينتج من تساويهما أن زاوية  $AOB =$  زاوية  $COD$  وهو المراد

(برهان الثاني) يقال ان المثلثين  $AOB$  و  $COD$  متساويان لتساوي ضلعيين والزاوية المحصورة بينهما من أضلاعهما لتساويهما من الضلع  $AO = CO$  و  $OB = OD$  وحينئذ يكون هذان الوتران متساويين يكون قوساهما كذلك أعني أن القوس  $AB =$  القوس  $CD$  وهو المطلوب

## نظرية

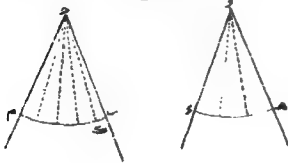
(٨٠) في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية النسبة بين أي زاويتين مركبتين هي دائماً كالنسبة بين قوسيهما الواقعين بين ضلعيهما (شكل ٧٠)



ليكن  $\alpha$  و  $\beta$  زوايتين مركبتين في دائرتين متساويتين ولنفرض أولاً وجود مقياس مشترك بين قوسيهما  $\alpha$  و  $\beta$  وأنه منحصر  $\gamma$  مرات في القوس  $\alpha$  و  $\epsilon$  مرات في القوس  $\beta$  وحينئذ تكون النسبة بين هذين القوسين هي  $\frac{\gamma}{\epsilon}$  (نتيجة ٧٦) فإذا وصل الآن جميع نقاط التقاسيم مركزى الدائرتين

يشاهد أن الزاوية  $\alpha$  انقسمت إلى سبع زوايا مركزية متساوية لتساوى أقواسها (٧٩) المحصورة بين أضلاعها وأن الزاوية  $\beta$  انقسمت إلى أربع زوايا مركزية متساوية وتكون النسبة بين الزاويتين هي  $\frac{\gamma}{\epsilon}$  وهي عين النسبة الكائنة بين القوسين

فإذا لم يوجد بين القوسين مقياس مشترك بأن كانا غير متناسعين يقسم القوس  $\beta$  إلى ثلاثة أقسام متساوية (شكل ٧١)



ثم نفرض أن القوس  $\alpha$  يشتمل على أربعة من هذه الأقسام وعلى الجزء  $\beta$  ك الأصغر من أي واحد من هذه الأقسام فتكون النسبة بين القوسين  $\alpha$  و  $\beta$  أكبر من  $\frac{4}{3}$  وأصغر من  $\frac{5}{3}$

ثم إذا وصل بين المراكز  $O$  و  $O'$  وبين نقط

التقاسيم مستقيمتين يشاهد أن الزاوية  $\beta$  انقسمت إلى ثلاث زوايا مركزية متساوية وأن الزاوية  $\alpha$  تشتمل على أربع من هذه الزوايا وعلى الزاوية  $\beta$  ك الأصغر من أي واحدة منها وحينئذ تكون النسبة بين الزاويتين محصورة بين الكسرين  $\frac{4}{3}$  و  $\frac{5}{3}$  وبناء عليه تكون النسبتان  $\frac{\alpha}{\beta}$  و  $\frac{\alpha'}{\beta'}$  محصورتين بين الكسرين  $\frac{4}{3}$  و  $\frac{5}{3}$

لكنه إذا قسم القوس  $\beta$  إلى عشرة أقسام أو مائة جزء أو ألف جزء أو ... الخ متساوية

فانه يبرهن كما سبق بأن النسبتين السابقتين محصورتين بين عددين متوالين من أجزاء العشرات  
أومن أجزاء المئين أومن أجزاء الألوف أو الخ وحينئذ فتكون هاتان النسبتان متساويتين حيث  
انه قد شوهد أنهما محصوران بين عددين يمكن أن يؤل الفرق بينهما الى كمية صغيرة جدا على  
قدر ما يراد

و ينتج مما ذكرناه اذا أريد إيجاد النسبة بين زاويتين فانه يتعوض ذلك بالبحث عن النسبة بين  
قوسيهما المحصورين بين أضلاعهما باعتبار رأسهما مركزين لهما وحينئذ اذا اعتبر أحد القوسين  
وحدة للاقواس وزاوية وحدة للزاوية الأخرى مشتملة على وحدة الزوايا بقدر  
اشتمال قوسها على وحدة الاقواس ولذا يقال على وجه العموم ان الزاوية تقاس بقوسها المحصور  
بين ضلعها الذي مركزه رأسها

(٨٠) وقد اتفقوا على جعل الزاوية القائمة وحدة للزوايا لكون مقدارها ثابتا وعلى اعتبار قوسها  
وهو ربع المحيط الذي مركزه رأسها وحدة للاقواس بحيث لو أريد تقدير أى زاوية فانه يقدر قوسها  
بربع المحيط

والطريقة الآتية المبنية على تقسيم المحيط هي المستعملة في التقدير  
فيقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ جزءا متساوية تسمى درجا وتقسم الدرجة الى ٦٠ دقيقة  
والدقيقة الى ٦٠ ثانية وهكذا وحينئذ فتقدر الزاوية بمقدار الدرج والدقائق والثواني المشتمل  
عليه قوسها ولا فرق في نسبة عدد الدرج والدقائق والثواني وهكذا القوس أو للزاوية فيقال ان  
قوس كذا أو زاوية كذا تشتمل مثلا على عشر درجات وخمس عشرة دقيقة وسبع ثوان ولاجل  
الاختصار في الكتابة يرمز بهذه العلامة (°) لبيان الدرجة وبهذه (′) لبيان الدقيقة  
وبهذه (″) لبيان الثانية وهكذا

فالزاوية أو القوس الذي مقداره ١٥ درجة و ٢٧ دقيقة و ١٩ ثانية يكتب هكذا ١٥° ٢٧′ ١٩″  
والاعمال التي تقدمت في علم الحساب على الاعداد المتسبة يجري تطبيقها هنا على الدرج  
والدقائق والثواني بدون فرق ولتمثل لذلك فنقول

أولا - المطلوب تعيين مقدار الزاوية الثالثة من مثلث اذا علم زاويتاه الأخرى ان احدهما  
تساوى ١٦° ٢٥′ ٦″ والثانية تساوى ٤٧° ٥٣′ ٨″ يقال حيث كل مجموع زاويتا المثلث  
مساويا قائمتين أو ١٨٠° كل مقدار الزاوية المطلوبة يعين بواسطة طرح مجموع الزاويتين  
المعلومتين من ١٨٠° هكذا

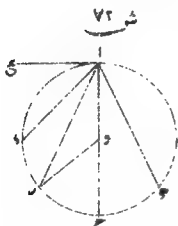
$$180 - (16^{\circ} 25' 6'' + 47^{\circ} 53' 8'') = 116^{\circ} 19' 6'' = 116^{\circ} 19' 6''$$

(٧) القصة البهية (اول)

ثانياً - المطلوب حساب الدرع الموجود في زاوية شكل كبير الاضلاع عدداً أضلاعه ٢٥ ولذلك يقال ان عدد الزوايا القائمة الموجودة في هذا الشكل مساوياً الى  $٤٦ = ٢(٢٥ - ٢)$  وبضرب هذا العدد في ٩٠ يحدث ٤١٤٠  
وتوجد طريقة أخرى جديدة اعشارية في تقسيم محيط الدائرة بخلاف الطريقة السابقة وهي تقسيمه الى ٤٠٠ جزء متساوية يسمى واحد اعراس والغرامة تنقسم الى ١٠٠ دقيقة والدقيقة الى ١٠٠ ثانية وهكذا وهذه الطريقة وان كان يسهل الحساب بواسطتها لكن لازال استعمال الطريقة القديمة جارياً وهو الذي تتبعه في هذا المختصر

## نظريّة

(٨٢) معيار الزاوية المحيطية هو نصف القوس المحصور بين ضلعها (شكل ٧٢)



ولهذه الزاوية جلة أوضاع يحتاج الامر لمعرفةا  
(الوضع الاول) أن يمر أحد ضلعها بالمرکز مثل زاوية  
ب أ ح فبتوصيل نصف القطر ب و تكون الزاوية  
ب و ح انخارجة عن اثلث ب و أ مساوية الى  
و أ + و ب وحيث ان هاتين الزاويتين متساويتان  
لكون المثلث متساوي الساقين تكون زاوية ب و ح  
= ٢ ب أ و لما كانت زاوية ب و ح تقاس بالقوس

ب و فتكون زاوية ب أ و التي هي نصفها تقاس بنصف القوس ب و

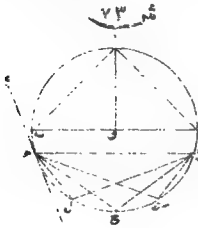
(الوضع الثاني) ان يكون المركزين الضلعين مثل زاوية ب أ ه وفي هذه الحالة تكون زاوية  
ب أ ه = ٢ ب أ + ٢ ح أ وحيث ان كل واحد من هاتين الزاويتين تقاس بنصف القوس  
المحصورين ضلعها كانت زاوية ب أ ه تقاس بنصف مجموع القوسين المذكورين أو بنصف  
القوس ب ه المحصورين ضلعها

(الوضع الثالث) ان يكون المركز خارجاً عن انقراج الزاوية مثل زاوية ب أ د وفي هذه الحالة  
تكون هذه الزاوية هي الفرق بين الزاويتين ح أ د و ح أ ب وتقاس حينئذ بنصف ب د  
وهو الفرق بين القوسين ح د و ب و

(الوضع الرابع) ان يكون أحد ضلعي الزاوية مماساً للمعيط مثل الزاوية ه أ ع فان معيارها

لا يزال مساويا لنصف القوس  $ا هـ$  وذلك لأنه إذا فرضت ان الزاوية المقروضة هي زاوية  $هـ ا د$  ثم فرض ان الضلع  $هـ ا$  ثابت وان الضلع  $ا د$  متحرك حول نقطة  $ا$  بحيث تقرب نقطة  $د$  شيئا فشيئا من نقطة  $ا$  فان جميع الزوايا المتوالية الحادثة تقاس بانصاف الاقواس المحصورة بين أضلاعها وبالجملة فعندما تصل نقطة  $د$  الى نقطة  $ا$  يكون معيار الزاوية  $هـ ا ع$  مساويا لنصف القوس  $ا هـ$

وينتج من ذلك (شكل ٧٣)



أولا - ان الزوايا  $هـ ل ع$  و  $هـ ع ع$  و  $هـ ع ع$  التي رؤسها على المحيط وأضلاعها واصلها الى نهايتي قوس واحد تكون كلها متساوية لاشتراكها في معيار واحد وهو نصف القوس  $هـ ا ع$

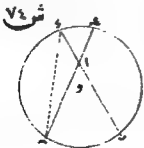
ويمكن التعبير عن هذه النتيجة بطريقة مختصرة فيقال ان جميع الزوايا المرسومة في قطعة واحدة كلها متساوية

ثانيا - ان الزاوية  $ح ا ب$  التي رؤسها بالمحيط وضلعها  $ا ح$  و  $ا ب$  واصلان الى نهايتي القطر  $ب ح$  هي زاوية قائمة لان معيارها نصف القوس المحصور بين ضلعها وحيث كان القوس مساويا لنصف محيط فيكون معيارها مساويا لربع محيط وحينئذ فكل زاوية مرسومة في قطعة مساوية لنصف الدائرة تكون زاوية قائمة

ثالثا - ان الزاويتين المتقابلتين في أي شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة متكاملتان لان مجموع معياريهما مساو لنصف محيط

## نظريــــــــــــــــة

(٨٣) معيار الزاوية الداخلة أي التي رؤسها بين المحيط والمركز يساوي نصف مجموع القوسين المحصور احدهما بين ضلعها والثاني بين امتدادهما أعني ان زاوية  $ا ح د = ب هـ + ج هـ$  (شكل ٧٤)



ولبرهنة على ذلك يوصل المستقيم  $د ح$  فالزاوية  $ب ا ح$  الخارجة عن التمام  $ا د ح$  تسوى  $ب + ج$  أو  $ب ا ح = ب + ج$  وهو المطلوب  $ا ح د = ب هـ + ج هـ$

## نظـرية

(٨٤) الزاوية الخارجة أى التى رأسها خارج المحيط تماس بنصف الفرق بين القوسين المحصورين

بين ضلعها (شكل ٧٥)



$$\text{أعنى ان زاوية } \angle ACD = \frac{1}{2} (\text{قوس } AB - \text{قوس } CD)$$

والبرهنة على ذلك يقال اذا وصل المستقيم بـ د حدث ان

$$\text{زاوية } \angle BCD = \angle A + \angle B \text{ أو } \angle A = \angle BCD - \angle B \text{ أو زاوية}$$

$$\angle A = \frac{1}{2} (\text{قوس } BCD - \text{قوس } CD) \text{ وهو المراد}$$

نتيجة - اذا كان أحد ضلعي الزاوية الخارجة أو كلاهما مماسا للمحيط فان معيار الزاوية

لا يزال مساويا لنصف الفرق بين القوسين المحصورين بين ضلعها (شكل ٧٦)

$$\text{فالزاوية } \angle EAM = \frac{1}{2} (\text{قوس } EM - \text{قوس } EF)$$

لانه اذا وصل م حدث

$$\angle EAM = \angle M + \angle A \text{ أو } \angle A = \angle EAM - \angle M$$

$$\text{أو } \angle A = \frac{1}{2} (\text{قوس } EM - \text{قوس } EF)$$

$$\text{والزاوية } \angle EAM = \frac{1}{2} (\text{قوس } EM - \text{قوس } EF)$$

وذلك لانه اذا وصل ب حدث أن

$$\angle B = \angle A + \angle A \text{ أو } \angle A = \angle B - \angle A \text{ أو } \angle A = \frac{1}{2} (\text{قوس } BE - \text{قوس } EF)$$

فائدة - بالتأمل فى (الشكل ٧٦) يعلم أن الزاويتين  $\angle B$  و  $\angle EAM$  متساويتان

لتساويهما فى المعيار وحيث ان تكون الزاويتان  $\angle A$  و  $\angle B$  متساويتين ويكون المثلث

$\triangle ABE$  متساويا الساقين والعمود النازل من رأسه على قاعدته يمر بطبقها وسطها وبنا عليه فانه لا بد

وأن يمر بالمركز ومن ذلك نتج هذه القاعدة وهى

كل زاوية من سومة خارج الدائرة وضلعها مماسان لمحيطها فان جزيئهما المحصورين بين نقطتي

التماس ورأسهما متساويان وأن المستقيم المنصف لها يمر بمركز الدائرة ويكون عمودا على وسط الوتر

الواصل بين نقطتي التماس

(نتيجة ١) كل نقطة مثل أ خارج محيط الدائرة و يمكن أن يمد منها مماسان إلى متساويان

وذلك لانه اذا فرض أن  $\triangle ABE$  مماس لمحيط الدائرة ووصل نصف القطر  $OB$  كان ضرورة عمودا

على المماس ثم اذا تصورنا تدوير نصف المحيط الاعلى حول القطر م ح فان نقطة ب تنطبق طبعاً على نقطة ح وبأخذ المماس اب الوضع ا ح وأما نصف القطر و ب فانه يقي دائماً عمودياً على اب في أثناء الدوران وبأخذ الوضع و ح العمودى على ا ح وبذلك يكون ا ح مماساً آخر وهو مساو اب كما تقدم

(نتيجة ٢) مجموع أى ضلعين متقابلين من أى شكل رباعي مرسوم على الدائرة يساوى مجموع الضلعين الآخرين من (شكل ٧٧) أعني يكون

$$ا ح + ه ح = ا ب + و ح$$

وذلك لان

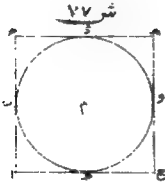
$$ا ب = ا ط \text{ و } ب ح = ح د \text{ و } و ح = ه ح$$

$$\text{و } و ح = ح ط$$

وبجمع هذه المتساويات على بعضها يحدث

$$ا ب + ب ح + ح و + و ح = ا ط + ح د + ح ط + ح و$$

$$ح ط + ح و \text{ أو } ا ح + ه ح = ا ب + و ح \text{ وهو المطلوب}$$



## الفصل السادس

### في الدعاوى العملية

(٨٥) حل أى مسألة عملية بواسطة المسطرة والبرجل هو بيان نوال الاعمال التى تجرى بواسطة

الخطوط والدوائر ليعقها حل المسئلة المفروضة

والسير العالم الذى يجب اتباعه فى ذلك هو

أولاً - أن يفرض أن المسئلة تحاول ويرسم الحل المطلوب

ثانياً - أن يجتهد دائماً فى البحث عن النقط التى تكفى معرفتها لانتمام الحل مع السهولة باعتبار

أنها مجهولة مع الاهتمام دائماً فى تنقيص عددها على قدر الامكان حتى انها تجعل واحدة فقط

ان أمكن ذلك

ثالثاً - أن يجتهد فى أن يبرهن بناء على معالم المنطوق أو فروضه بأن كل واحدة من هذه النقط

المجهولة امام موجوده على خطين مستقيمين معلومين يتأق ردهما وانه على مستقيم ومحيط دائرة

أو على محيطى دائرتين كذلك

رابعا - أن يجتهد في ترجيع تعيين النقط المجهولة الى الحل الذي أجرى المسئلة  
ولنبدأ بحل بعض مسائل بسيطة يتوصل بها الى حل مقدار عظيم من المسائل الاخر فنقول

## في رسم الخطوط المتعامدة

### دعوى عليه

(٨٦) طريقة اقامة عمود على وسط مستقيم معلوم (شكل ٧٨) يفرض لذلك أن المسئلة بمحاولة

وأن هذه هو العمود المطلوب ثم يقال من المعلوم أن أي نقطتين  $\text{ش ٧٨}$   
مثل  $\text{و د}$  كافيتان لتعيينه وحيث أنه محل هندسي للنقط  
المتساوية البعد عن النقطتين  $\text{ا ب}$  فكل نقطة مثل  $\text{و}$   
توجد في تقاطع محيطي الدائرتين المتساويتين اللتين مركزاهما  
 $\text{ا ب}$  ومثلها نقطة  $\text{د}$  ولما كان من اللزوم تقاطع محيطي  
الدائرتين فيكون  $\text{ا ب} > \text{ا د} + \text{د ب}$  أو  $\text{ا ب} > \text{ا د}$  أو  
 $\text{ا ب} < \text{ا د}$

ومن ذلك تنتج طريقة الحل وهي

يجعل نهايتي المستقيم المعلوم مركزين وينصف قطراً كبيراً نصفه يرمم محيطاً دائرتين متقاطعتان  
فالوتر المشترك بينهما يكون هو العمود المطلوب

نتيجة - يمكن استعمال عين الاعمال السابقة فيما اذا أريد تصنيف مستقيم معلوم

### دعوى عملية

(٨٧) طريقة مدم مستقيم عمودي على آخر معلوم من نقطة مفروضة

أولا - اذا كانت النقطة  $\text{د}$  المعلومة موجودة على  $\text{ش ٧٩}$   
المستقيم  $\text{ا ب}$  (شكل ٧٩) وفرض أن المسئلة بمحاولة

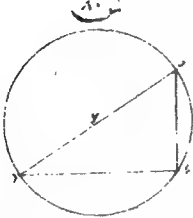
وأن  $\text{و د}$  هو العمود المطلوب يلزم أن نبعث عن تعيين  
نقطة أخرى من نقط العمود المطلوب ولتكن  $\text{و}$  مثلاً



والوصول الى ذلك يقال لو أخذ البعدان  $\alpha$  و  $\beta$  بجائى نقطة  $\gamma$  بحيث يكونان متساويين لوجدت نقطة  $\delta$  على بعدين متساويين من هاتين النقطتين وبناء عليه فتوجد في تقاطع محيطى الدائرتين المتساويين اللتين مركزاهما  $\alpha$  و  $\beta$  بنصف قطر كاف لتقاطعهما ومن ذلك تنتج طريقة الحل الآتية وهى

بؤخذ بجائى نقطة  $\delta$  بعدان متساويان  $\alpha$  و  $\beta$  ثم نجعل كل واحدة من النقطتين  $\alpha$  و  $\beta$  مركزاً ونصف قطراً أكبر من  $\alpha$  يرسم قوسان من محيطى دائرتين فيتقاطعان في نقطة مثل  $\gamma$  ثم يوصل  $\gamma$  فيكون هو العمود المطلوب

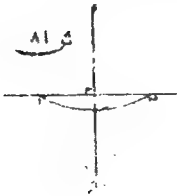
ثانياً - اذا وجدت نقطة  $\delta$  على نهاية مستقيم لا يمكن مده (شكل ٨٠)



ففي هذه الحالة لا يمكن اجراء الاعمال السابقة لكنه اذا فرض أن المسألة محلولة وأن  $\beta$  هو المستقيم العمودى على  $\alpha$  لزم البحث عن نقطتين نقط هذا العمود وتكن نقطة  $\beta$  ولذلك يقال من المعلوم أنه لو كانت نقطة  $\beta$  معلومة ووصل منها الى نقطة  $\alpha$  احدى نقط المستقيم  $\alpha$  فانه يتكون من هذا المستقيم الموصول ومن المستقيم المعلوم ومن العمود المطلوب مثلث قائم الزاوية في  $\delta$  وحينئذ فاذا

اعتبر المستقيم  $\alpha$  قطراً ورسم عليه محيط دائرة فانه يترسوة نقطة  $\delta$  وذلك لان زاوية  $\delta$  كانت قائمة وبعبارة اخرى محيط فلا بد أن يكون رأسها على المحيط وعماد  $\delta$  كترسوة قاعدة الحل هذه تؤخذ نقطة ما اختيارية مثل  $\gamma$  خارج المستقيم  $\alpha$  ثم نجعل مركزاً ونصف قطر مساو  $\gamma$  يرسم محيط دائرة يقطع  $\alpha$  في نقطة  $\alpha$  فاذا وصل  $\alpha$  ومده على استقامته حتى يقطع محيط الدائرة في نقطة  $\beta$  تكون هي نقطة ثانية من العمودى يكون  $\beta$  و هو العمود المطلوب

ثالثاً - اذا فرضت نقطة  $\delta$  خارج المستقيم  $\alpha$  (شكل ٨١)



وأن  $\delta$  و هو العمود المطلوب

فلتعيين نقطة أخرى من نقط العمود مثل نقطة  $\delta$  نجعل نقطة  $\delta$  مركزاً ونصف قطر ما يرسم قوس محيط دائرة بحيث يقطع المستقيم المعلوم في نقطتين مثل  $\alpha$  و  $\beta$  وحينئذ تكون نقطة  $\delta$  المطلوب تعيينها موجودة على بعدين متساويين من نقطتي  $\alpha$  و  $\beta$  وتعين انذاك

تقدم بتقاطع قوسى محيطى دائرتين متساويتين مركزيهما بالنقطتين  $أ$  و  $ب$  ومن ذلك نتج طريقة الحل هذه

تجعل نقطة  $د$  مركزاً ونصف قطر كفى يرسم قوس محيط دائرة تقطع المستقيم المعلوم فى نقطتين مثل  $أ$  و  $ب$  ثم تجعل كل واحد من هاتين النقطتين مركزاً ونصف قطراً كبيراً من نصف  $أب$  يرسم قوسان من محيطى دائرتين فيتقاطعان فى نقطة مثل  $هـ$  ويكون  $هـ$  هو العمود المطلوب

## فى رسم الخطوط المتوازية

قبل الدخول فى رسم الخطوط المتوازية نذكر هذه الدعوى العملية

### دعوى عملية

(٨٨) طريقة مستقيم يصنع مع مستقيم معلوم من نقطة مفروضة عليه زاوية تساوى زاوية معلومة (شكل ٨٢)



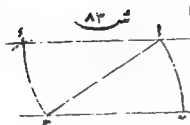
تكن  $د$  هى الزاوية المعلومه و  $أ$  هى النقطة المفروضة على المستقيم  $ب$  فنفرض أن المسئلة محولة وأن المستقيم  $أهـ$  هو المستقيم المطلوب وحينئذ فيحتاج الامر الى تعيين نقطة أخرى من هذا المستقيم مثل نقطة  $هـ$  وللوصول الى ذلك يقال

اذ جعل كل واحد من النقطتين  $أ$  و  $د$  مركزاً ونصف قطر اختيارى يرسم قوساً محيطى دائرتين متساويتين فنحيطان الزاويتين  $أ$  و  $د$  يجب أن تكونا متساويتين وهما مركبتان فى دائرتين متساويتين فيكون قوساهما متساويين ووزاهما كذلك وحينئذ فتوجد نقطة  $هـ$  فى تقاطع القوس  $هـ$  بمحيط الدائرة الذى مركزه  $د$  ونصف قطره مساو للوتر  $د$  ومن ذلك نتج طريقة الحل هذه تجعل نقطة  $د$  مركزاً ونصف قطر اختيارى يرسم القوس  $هـ$  ثم تجعل نقطة  $أ$  مركزاً ونصف القطر المذكور يرسم قوس غير محدود ثم تجعل نقطة  $د$  مركزاً ونصف قطر مساو للوتر  $د$  يرسم قوس من محيط دائرة تقطع القوس  $هـ$  فى نقطة  $هـ$  فاذ ارسل  $هـ$  تكون زاوية  $هـ$   $أ$  هى الزاوية المطلوبة

## دعوى علمية

(۸۹) طریقه مدامتہ قیام وازی آخر معلوما من نقطۃ ما خارجۃ عنہ

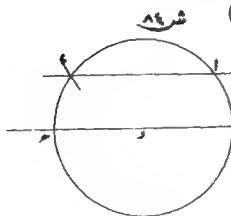
### الحل الاول (شكل ٨٣)



إذا كانت  $A$  هي النقطة المألومة وكل  $B$  هو المستقيم المألوم وفرضنا أن المسألة محلولة وأن  $A$  هو المستقيم الموازي المطالبين. نأعين نقطة أخرى مثل  $D$  من المستقيم الموازي المذكور

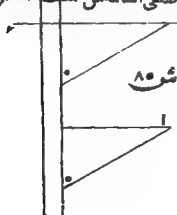
الوصول الى ذلك يقال اذا وصل بين نقطة  $A$  المقروضة وبين احدى نقط المستقيم المعالوم ولتكن  $B$  كانت زاوية  $A$  احب مساوية لزاوية  $C$  اء لكونهم متبادلتين داخليتين وحيث ندرجع الامر الى رسم زاوية  $C$  اء مساوية لزاوية  $A$  احب كما هم في غرة ٨٨

### الحل الثاني (شكل ٨٤)



إذا فرض أن المسألة المحلولة وأن  $a$  هو المستقيم الموازي  
المطلوب ورسم محيط دائرة ماراً بنقطة  $a$  وقاطعاً  
للمستقيم  $b$  في  $c$  حيث أن القوس  $ac$  يجب أن  
يكون مساوياً للقوس  $ab$  فيكون  $ac$  هما كذلك  
وحينئذ فتستعين نقطة  $d$  بتقاطع المحيط الأول بمحيط آخر  
مرکزها نقطة  $e$  ونصف قطرها مساوياً للقوس  $ab$

### الحل الثالث (شكل ٨٥)

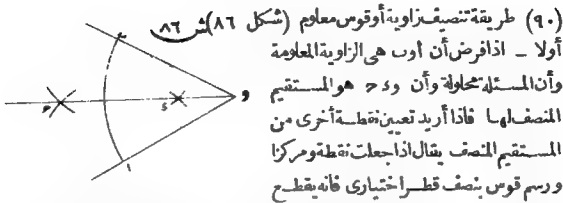


يستعمل أحيانا لحل هذه المسئلة المثلث الخشبي وهو قطع من الخشب الرقيق على هيئة مثلثات  
أحادي زوايا قائمة بواسطة انزلاقه على مسطرة بان يطبق أحد ضلعي القائمة من المثلث المذكور  
على المستقيم المطلوب وتطبق حافة المسطرة على الضلع الثاني  
للزاوية القائمة ثم تثبت المسطرة باليدوير ثلث المثلث على حافتها  
حتى يمر الضلع الذي كان منطبقا على الضلع ب بالنقطة أ  
فأذا رسم مستقيم بطول حافة هذا الضلع كان موازيا  
للمستقيم ب لأن الزوايا المتناظرة الحادة ثمن المستقيمين  
المذكورين ومن حافة المسطرة متساوية لكونها قائمة

(۸) التحفة البیه (اول)

## فى تنصيف زاوية أوقوس معلوم

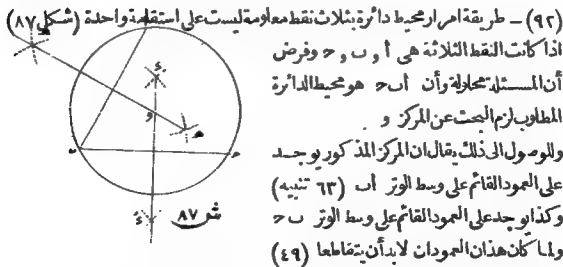
### دعوى عملية



الضلعين  $أد$  و  $وب$  فى نقطتين ويكون المستقيم المنصف ما اضرورة بمتصف القوس  $أب$  المحصور بين ضلعى الزاوية وعمودا على منتصف الوتر  $أب$  وحينئذ لتعين نقطة  $ح$  من المستقيم المنصف يجرى العمل كما أجرى فى غرة ٨٦

ثانيا - إذا فرض أن  $أب$  قوس معلوم راد تنصيفه يقال إذا تصورنا وجود وتره فان العمود المقام على منتصفه يمر بمنتصف القوس أيضا وحينئذ فيقدر جمع الامر الى اجراء غرة ٨٦ (٩١) لما كان يطلب احيا نارسم محيط دائرة يمر بثلاث نقط معلومة ليست على استقامة واحدة أو تعيين مركز محيط دائرة أوقوس معلوم ناسب ذكر العملية الآتية

### دعوى عملية



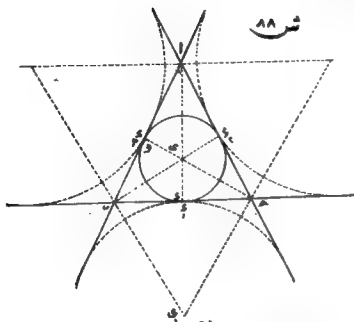
ففيه عليه يرجع الامر الى اجراء اعمال غرة ٨٦ مرتين ليتوصل الى المطلوب

نتيجة - إذا أريد تعيين مركز محيط دائرة معلوم أو مركز قوس معلوم يؤخذ عليه ثلاث نقط وتجرى الأعمال السابقة

## في رسم المستقيمت المماسية لمحيطات الدوائر

### دعوى عملية

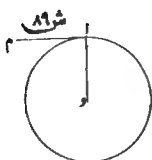
(٩٣) طريقة رسم محيط دائرة عيس أضلاع مثلث معلوم (شكل ٨٨)



ليكن  $ABC$  هو المثلث المعلوم فإذا  
فرض أن المسئلة محلولة وأن  $O$  هو  
مركز الدائرة الذي عيس أضلاع المثلث  
فمن حيث أن المركز  $O$  يجب أن يكون  
على بعدين متساويين من الضلعين  $AB$   
و  $AC$  فيوجد ضرورة على المستقيم  
المنصف لزاوية  $A$  ولهذا السبب أيضا  
يوجد على المستقيم المنصف لزاوية  
 $B$  وأن فهو موجود في نقطة تلاقيهما  
ثم إذا انصفت الزوايا الخارجة من المثلث  
فانه يتوصل الى محيطات لدوائر أخرى مماسة لأضلاع المثلث الثلاثة

### دعوى عملية

(٩٤) طريقة مستقيم مماس لمحيط دائرة من نقطة معلومة وإذا كانت حالتان



الاولى - إذا كانت النقطة المعلوم  $A$  موجودة على محيط  
الدائرة (شكل ٨٩) فمن حيث أن المماس الذي يمر بنقطة  $A$   
يجب أن يكون عمودا على نصف القطر المار بهذه النقطة التي هي  
نقطة التماس ففسد المسئلة الى طريقة إقامة عمود على  
مستقيم من نقطة مروضة عليه مرة ٨٧

الحالة الثانية - اذا كانت النقطة  $ا$  المعلومة موجودة خارج المحيط وفرض ان المسئلة محولة

وان  $د$  هي النقطة المجهولة (شكل ٩٠)

التي يجب البحث عنها يقال ان زاوية  $د$  قاعة

فتكون مرسومة في نصف محيط قطره او

وحيث تفقد آلت المسئلة الى عمدة ٨٦ وهي

تنصيف المستقيم او وأما نقطة  $د$  فانها

تكون موجودة في تقاطع محيطي الدائرتين

$د$  و  $و$

حل ثان - اذا كانت  $ا$  هي النقطة المفروضة (شكل ٩١) وان  $ا$  هو المماس

المطلوب واريد تعيين نقطة التماس  $د$  يحد

نصف القطر  $و$  بمقدار  $د ه = د و$  ومن

المعلوم ان معرفة نقطة  $ه$  تكفي لمعرفة

نقطة  $د$

ثم ان نقطة  $ه$  توجد على محيط الدائرة الذي

مركزه  $و$  ونصف قطره مساو  $د و$  وكذا

توجد على محيط الدائرة الذي مركزه  $ا$  ونصف

قطره  $ا و$  وبناء عليه فتوجد في تقاطعها

تنبيه - عندما تكون نقطة  $ا$  خارجة عن المحيط فانه يسهل أو لا مشاهدة توفر شروط

تقاطع محيطي الدائرتين لان البعدين المركزين في كلا الشكلين  $٩٠$  و  $٩١$  هو أحد نصفي

القطرين فيكون ضرورة أصغر من مجموع نصفي القطرين وأكبر من فاصلهما وثانيا وجود

مماسين في كل واحد من الحلين

## دعوى عملية

(٩٥) طريقة مدهمماس لمحيطي دائرتين لذلك حالتان

الاولى - في التماس من الخارج (شكل ٩٢) اذا كان  $و$  و  $و$  محيطي الدائرتين

المراد مدهمماس لهما من الخارج وفرض ان المسئلة محولة وان  $ا ب$  هو المماس كان النقطتان

$ا$  و  $ب$  هما المقصي تعيينهما

فإذا وصل  $وا$  و  $وب$  ومن نقطة  $و$  المستقيم  $و$  موازاً للمستقيم  $اب$  حتى يقابل

المستقيم  $او$  في نقطة  $ح$  كان تعيين

نقطة  $ح$  كفاية لتعيين النقطتين

$ا$  و  $ب$  وذلك لأنه إذا وصل  $و$

ومد على استقامته فانهما تعين نقطة  $ا$

وكذا حيث ان كلامنا  $وا$  و  $وب$

$ع$  و مد على  $و$  فيكونان متوازيين

فإذا مدحيتن من نقطة  $و$  المستقيم  $وب$  موازياً إلى  $وا$  فانهما تعين أيضاً نقطة  $ب$

و للوصول إلى تعيين نقطة  $ح$  يقال إذا جعلت نقطة  $و$  مركزاً ونصف قطر مساوياً  $وا$  - و  $وب$

رسم محيط دائرة فانه يكون مماساً للمستقيم  $و$  العمودى على نصف القطر  $وا$  وحيث ان

تعيين نقطة  $ح$  بواسطة رسم مماس من نقطة  $و$  للمعيط  $و$  الذى مركزه  $و$  ونصف قطره

$وا$  - و  $وب$

وبالتأمل يعلم ان لهذه المسئلة حلين

الحالة الثانية - فى القياس من الخارج (شكل ٩٣) ليكن حرفا  $و$  و  $ز$  من مركزين للمعيطين

الدائرتين المعالومتين  $وا$  و  $ب$  مماساً

داخلاً بفرض ان المسئلة محمولة

فتمد نصفي القطرين المتوازيين

$وا$  و  $وب$  ثم نبعث عن النقطتين

$ا$  و  $ب$  فإذا متمعن نقطة  $و$  المستقيم

$و$  موازياً للمماس  $اب$  يشاهدان

تعيين نقطة  $ح$  كفاية لتعيين كل واحدة

من النقطتين  $ا$  و  $ب$  فإذا جعلت

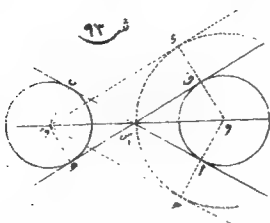
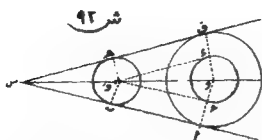
نقطة  $و$  مركزاً ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساوياً  $وا$  و  $وب$  فيكون مماساً للمستقيم

$و$  وبناء عليه فانهما تعين نقطة  $ح$  بواسطة مد مماس من نقطة  $و$  لمحيط الدائرة الذى

مركزه  $و$  ونصف قطره مساوياً لمجموع نصفي القطري الدائرتين المعالومتين

ومن المعارف ان المسئلة لا تكون ممكنة الا اذا كانت نقطة  $و$  خارجة عن المحيط المساعد أعنى

يجب أن يكون  $و = او < او > س + ص$



وهذا يدل على ان المحيطين المعلومين اما ان يكونا متباعيين في الخارج أو متماسين كذلك وفي الحالة الاولى يكون للمسئلة حلان وأما في الثانية فليس لها سوى حل واحد فقط

## في رسم المثلثات

### دعوى علمية

(٩٦) طريقة رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المحصورة بينهما (شكل ٩٤)

اذا فرض ان المسئلة محولة وان  $AB$  هو المثلث المطلوب الذي علم منه  $A$  و  $B = a$  و  $C = b$  فمن حيث ان الضلع  $AC$  معلوم فانه يوضع في أى وضع على مستوى العمل ثم يرسم من نقطة  $A$  احدى نقطتي  $C$  زاوية  $C = b$  مساوية للزاوية المعلومة ثم يؤخذ على  $AB$  الطول  $AB = c$  المعلوم فاذا فصل  $B$  فقد تم رسم المثلث



### دعوى علمية

(٩٧) طريقة رسم المثلث اذا علم منه ضلع والزاويتان المجاورتان له (شكل ٩٤)

اذا فرض ان المسئلة محولة وان  $AB$  هو المثلث المطلوب الذي علم منه  $A$  و  $B = a$  و  $C = b$  فمن حيث ان  $A = a$  و  $B$  فانه يوضع في وضع ما في مستوى العمل ثم يرسم من النقطتين  $C$  و  $B$  زاويتان مساويتان للزاويتين المعلومتين فنقطتي  $A$  التي يتقاطع فيها المستقيمان الممدودان يتم بهما رسم المثلث

تنبيه ١ - المسئلتان السابقتان لا يمكن أن يكون لهما غير حل واحد بناء على نظريات تساوي المثلثات المتقدمة

تنبيه ٢ - اذا لم تعلم الزاويتان المتجاورتان  $C$  و  $B$  للضلع المعلوم  $a$  بل علمت الزاويتان  $A$  و  $B$  مثلاً يلزم قبل كل شئ الحصول على الزاوية  $C$  بواسطة طرح مجموع الزاويتين المعلومتين من قائمتين



## دعوى عملية

(٩٨) طريقة رسم المثلث اذا علمت أضلاعه الثلاثة (شكل ٩٨)  
اذا فرض ان المسئلة محلولة وان  $ا ب ح$  هو المثلث المطلوب الذي علم منه  $ا = ب ح$  ;  
 $ب = ا ح$  و  $ح = ا ب$

فمن حيث ان الضلع  $ا = ب ح$  المعلوم فانه يوضع في أى موضع في مستوى العمل ثم ان نقطة  $ا$   
توجد ضرورة في تقاطع محيطى الدائرتين اللتين مركزاهما  $ب$  و  $ح$  ونصفا قطرهما  $ا ب$  و  $ا ح$   
تنبيه ١ - يوجد للمسئلة حلان حيث ان محيطى الدائرتين يتقاطعان في نقطتين غير  $ا ب$   
هذين المين متطابقان لكونهما متساويين حيث تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة كل لتظيره  
تنبيه ٢ - يجب لا يمكن حل المسئلة أن يتقاطع محيطا الدائرتين ويحصل ذلك بما تقرر من  
كون الضلع الاكبر من أضلاع المثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من فاصلهما

## دعوى عملية

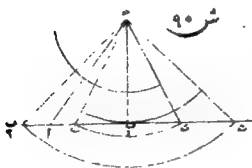
(٩٩) طريقة رسم المثلث اذا علم منه ضلعان والزاوية المقابلة لاحدهما (شكل ٩٩)

نفرض ان المسئلة محلولة وان  $ا ب ح$  هو المثلث  
المطلوب الذي علم منه  $ب = ا ح$  و  $ا = ب ح$   
و  $ا ب ح$  ان زاوية  $ا$  معلومة  
فتؤخذ نقطة  $ا$  على مستقيم غير محدود  
وليكن  $ا ب$  ويمتد منها مستقيم  $ا ح$  يصنع  
مع  $ا ب$  زاوية مساوية للزاوية  $ا$  ثم يؤخذ  
على  $ا ح$  طول مساو للضلع المجاور لزاوية  $ا$

ولاجل تكميل رسم المثلث يكفي تعيين الرأس الثالثة  $ب$  غير أن هذه النقطة توجد في آن واحد  
على الضلع  $ا ب$  وعلى محيط الدائرة الذي مركزه  $ح$  ونصف قطرهما  $ا ب$

تنبيه - من المفيد المناقشة في الاحوال الممكنة لحل هذا المسئلة ولذلك يقال

أولا - المسئلة تكون غير ممكنة اذا كان  $ا$  أصغر من العمود  $ح ب$  النازل من نقطة  $ح$  على  
المستقيم  $ا ب$



ثانيا - اذا كانت زاوية  $\alpha$  حذفتان الضلع  $\alpha$  يمكن أن يكون مساويا الى  $\beta$  وفي هذه الحالة يكون للمسئلة حل واحد هو المثلث  $\beta\alpha$  أو يكون  $\alpha$  أكبر من  $\beta$  وأصغر من  $\gamma$  وفي هذه الحالة يكون للمسئلة حلان مقبولان وهما المثلث  $\beta\alpha$  و  $\beta\alpha$  أو يكون  $\alpha$  أكبر من  $\gamma$  وفي هذه الحالة لا يكون للمسئلة الا حل واحد هو المثلث  $\beta\alpha$  لان المثلث  $\beta\alpha$  فيه زاوية منفرجة مكملته لزاوية  $\alpha$  المعلومة

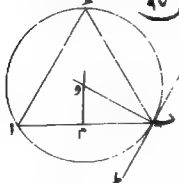


ثالثا - اذا كانت زاوية  $\alpha$  قائمة فإنه يتوصل الى حلين متطابقين  
رابعا - اذا كانت زاوية  $\alpha$  منفرجة فلاجل أن تكون المسئلة ممكنة يجب أن يكون الضلع  $\alpha$  أكبر من الضلع  $\beta$  ولا يوجد الا حل واحد (شكل ٩٦) وبالمجمل فإنه لا يوجد للمسئلة حلان الا في حالة واحدة فقط وهي التي يكون فيها  $\alpha > 90^\circ$  و  $\alpha > \beta$

في رسم قطعة دائرة على مستقيم تقبل زاوية معلومة

دعوى عملية

(١٠٠) طريقة رسم قطعة دائرة على مستقيم معلوم تقبل زاوية معلومة (شكل ٩٧)



لتكن  $\alpha$  احب القطعة المطلوبة بفرض ان المسئلة محولة  $\alpha$  وحيثنذا لا بد من تعيين المركز ولنالك يقال انه اذا اقيم عود على وسط  $\alpha$  فإنه يمر ضرورة بالمركز ومن جهة أخرى اذا مكن نقطة  $\beta$  المماس  $\beta$  لمحيط الدائرة فالزاوية  $\beta$  المماس المتكونة من المماس  $\beta$  والوتر  $\alpha$  تقاس بنصف القوس  $\alpha$  وحيثنذا تكون مساوية للزاوية المطلوبة واذا فإنه يمكن رسم هذا المماس

قبل رسم القطعة وان المركز  $\alpha$  يوجد على العمود القائم من نقطة  $\beta$  على المماس  $\beta$  وبما ذكر قد بين ان المركز  $\alpha$  يوجد في تقاطع مستقيمين يسهل رسمهما بناء على ما تقرره بنرتي

## الفصل السابع

### تمهيدات

- ١ - المطلوب تعيين نقطتين على محيط دائرة معلوم بحيث يكون بعداهما عن نقطة معلومة خارجة عنه متساويين
- ٢ - المطلوب إيجاد المحل الهندسي لمراكز الدوائر المتعددة في نصف القطر والمماس المستقيم معلوم
- ٣ - المطلوب امر ارماس محيط دائرة معلوم مواز بالمستقيم معلوم
- ٤ - ماهو المحل الهندسي لمراكز محيطات الدوائر المماسية لمستقيمين متقاطعين
- ٥ - المطلوب امر ارماس محيط دائرة نصف قطر معلوم يكون مماسا لمستقيمين معلومين سواء كانا متوازيين أو متقاطعين وذلك حالة عدم الامكان في حالة توازي المستقيمين المعلومين
- ٦ - المطلوب امر ارماس محيط دائرة يمر مستقيما معلوما في نقطة معينة عليه مع شرط مروره بنقطة معلومة
- ٧ - اذا فرض نقطتان بينهما بعد قدره  $\leq$  والمطلوب ان يمر منهما مستقيمان متوازيان يكون البعد بينهما مساويا م
- ٨ - المطلوب تعيين المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن محيط دائرة معلوم بمقدار معين
- ٩ - المطلوب تعيين المحل الهندسي لمراكز محيطات الدوائر المتساوية البعد عن محيط دائرة معلوم
- ١٠ - المعلوم محيط دائرة ومستقيم والمطلوب امر ارماس محيط دائرة نصف قطر معين يكون مماسا لهما
- ١١ - المطلوب امر ارماس محيط دائرة نصف قطر معين يقطع آخر معلوما في نقطتين معينتين اظهار حالة عدم الامكان وعدد الحلول
- ١٢ - المعلوم نقطتان والمطلوب تعيين نقطة تكون متباعدة عن احدهما بمقدار م وعن الثانية ببعد  $\leq$  ومتى يكون للمسئلة حلان ومتى يكون للمسئلة حل واحد ومتى تكون غير ممكنة
- ١٣ - المطلوب البرهنة على أنه اذا تماس محيطا دائرتين خارجيا أو داخلا ومد من نقطة التماس قاطعان لهما ثم وصل بين نقطتي تقابلهما مع كل محيط بمستقيم فان هذين المستقيمين يصيران متوازيين واذا لم يمس من نقطة التماس الا قاطع واحد ومد من نقطتي تقابلها بالمحيطين مماسان يكون هذان المماسان متوازيين

- ١٤ - المطلوب البرهنة على أنه إذا فرضت نقطة داخل زاوية وأُترزل منها عمودان على ضلعيها كان الشكل الرباعي الحادث يمكن أن يمر به محيط دائرة
- ١٥ - المطلوب البرهنة على أن شبه المنحرف الذي ضلعاؤه المنحرفان متساويان يمكن رسمه داخل محيط دائرة
- ١٦ - المطلوب البرهنة على أنه إذا وصل من رأس المثلث القائم الزاوية إلى وسط وتره مستقيم كان هذا المستقيم الواصل مساوياً لنصف الوتر
- ١٧ - إذا فرض مستقيمان متعامدان وفرض مستقيم ذو طول ثابت ينزلق عليهما والمطلوب معرفة محل أو أوسط أو تار المثلثات القائمة الزوايا المتكوبة من ذلك
- ١٨ - إذا أُترزل من رؤس المثلث أعمدة على أضلاعه ثم وصل بين مواقع هذه الأعمدة بمستقيمات فإنه يطلب البرهنة على أن تلك الأعمدة منصفة لزوايا المثلث الحادث
- ١٩ - المطلوب البرهنة على أن المستقيمين المنصفين للزاويتين الحادتين من امتداد الأضلاع المتقابلة من شكل رباعي حر سوم داخل الدائرة متعامدان
- ٢٠ - المطلوب البرهنة على أنه إذا متدوتران متقاطعان داخل دائرة فإن مجموع القوسين المحصورين بين امتدادهما يكون مساوياً لمجموع القوسين المحصورين بين القطرين الموازيين للوترين المذكورين
- ٢١ - المطلوب البرهنة على أن قطر الدائرة المرسومة داخل مثلث قائم الزاوية يساوي الفرق الكائن بين مجموع الضلعين المحيطين بالقائمة وبين الوتر
- ٢٢ - المطلوب رسم المثلث المتساوي الساقين إذا علم منه  
أولاً - القاعدة وزاوية الرأس  
ثانياً - زاوية الرأس والارتفاع  
ثالثاً - القاعدة ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله
- ٢٣ - المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية إذا علم منه  
أولاً - الوتر وزاوية حادة  
ثانياً - الوتر وأحد ضلعي القائمة  
ثالثاً - الوتر والارتفاع المنطرفة  
رابعاً - أحد ضلعي القائمة والارتفاع المقابل للوتر  
خامساً - أحد ضلعي القائمة ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله

- ٢٤ - المطاوب رسم المثلث اذا علم منه نقط أوسط أضلاعه الثلاثة
- ٢٥ - المطاوب رسم المربع اذا علم قطره
- ٢٦ - المطاوب رسم المستطيل اذا علم أحد أضلاعه والزاوية الحادة بين قطريه
- ٢٧ - المطاوب رسم المعين اذا علم قطراه
- ٢٨ - المطاوب رسم متوازي الاضلاع اذا علم ضلع منه وقطراه
- ٢٩ - المطاوب رسم شبه المنحرف المتساوي الساقين اذا علم منه
  - أولا - قاعدة تام وزاوية منه
  - ثانيا - قاعدة تام وارتفاعه
- ٣٠ - المطاوب رسم شبه المنحرف الكائن كيف ما اتفق اذا علمت أضلاعه الاربعة

(تم الجزء الاول من التحفة البهية و يليه الجزء الثانى ان شاء الله تعالى)

## فهرسة الجزء الاول من التحفة البهية

صحيفة	صحيفة
٣٤ الفصل الاول تعاريف	٣ الجزء الاول من التحفة البهية في الاشكال
٣٦ الفصل الثاني في الاوتار والاقواس	المستقيمة الاضلاع ومحيط الدائرة
٤٠ الفصل الثالث في خواص المماس وعمود المماس	٣ الباب الاول في الاشكال المستقيمة
٤٢ الفصل الرابع في اوضاع الدائرة	الاضلاع
٤٥ الفصل الخامس في مقادير الزوايا	٣ الفصل الاول في المبادئ
٥٣ الفصل السادس في الدعاوى العملية	٦ الفصل الثاني في الزوايا
٥٤ في رسم الخطوط المتعامدة	٩ الفصل الثالث في المثلثات
٥٦ في رسم الخطوط المتوازية	١٧ الفصل الرابع في المستقيمات
٥٨ في تصنيف زاوية أو قوس معلوم	المتعامدة والمائلة
٥٩ في رسم المستقيمات المماسية لمحيطات الدوائر	١٩ الفصل الخامس في المحل الهندسي
٦٢ في رسم المثلثات	٢٠ الفصل السادس في الاشكال المحدبة
٦٤ في رسم قطعة دائرة على مستقيم تقبل زوايا معلومة	٢٤ الفصل السابع في المستقيمات المتوازية
٦٥ الفصل السابع تمرينات	٣٠ الفصل الثامن في الاشكال المتوازية
	الاضلاع
	٣٣٠ الفصل التاسع تمرينات
	٣٤ الباب الثاني في محيط الدائرة وما يتعلق به

## المجلد الثاني

من كتاب التحفة الهندسية في الاصول الهندسية

تأليف

حضرة محمد بك عظيم

ناظر مدرسة دار العلوم وقلم الترجمة

(تنبیه)

وان كاذرنا في خطبة الكتاب في الجزء الاول ان الزيادات تميز عن الاصل بكتابتها بحروف دقيقة  
غير ان مقتضيات الاحوال اوجبت تمييزها بوضع نجوم قبلها في أوائل السطور فليست به

(الطبعة الاولى)

بالطبعة الكبرى الامرية ييولاق مصر المحمية

سنة ١٣٠٥ هجرية







بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## الجزء الثاني

في مساحات كثيرى الاضلاع والخطوط المناسبة وتشابه الاشكال  
والاشكال المنتظمة ومساحة الدائرة

### الباب الاول

في مساح كثيرى الاضلاع والخطوط المناسبة وتشابه الاشكال

### الفصل الاول

في مساح كثيرى الاضلاع

### تعريف

(١٠١) مساحة الشكل هي النسبة الكائنة بين مسطحة ومسطح وحدة السطوح

وحدة السطوح المتفق عليها هي المربع الذى ضلعه وحدة الاطوال

(١٠٢) الشكلان المتكافئان هما المتساويان في المساحة

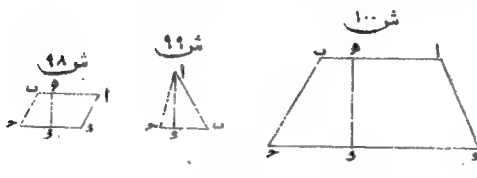
يمكن ان يتكافأ الشكلان مع ما بينهما من التباين الكلى في الصورة فالله اعلم لا يمكن أن تكافئ

مربعاً أو مستطيلاً أو مثلثاً أو غير ذلك

(١٠٣) ارتفاع متوازي الاضلاع  $أ ب ح د$  (شكل ٩٨) هو العمود  $هـ$  و الذي يقاس به البعد المحصور بين الضلعين المتوازيين  $أ ب$  و  $ح د$  المتعبرين قاعدتين له

(١٠٤) ارتفاع المثلث  $أ ب ح$  (شكل ٩٩) هو العمود  $أ د$  الذي يقاس به البعد المحصور بين الرأس  $أ$  و الضلع  $ب ح$  المقابل لها المتعبر قاعدته

(١٠٥) ارتفاع شبه المنحرف  $أ ب ح د$  (شكل ١٠٠) هو العمود  $هـ$  و الذي يقاس به البعد المحصور بين القاعدتين  $أ ب$  و  $ح د$  المتوازيتين



### دعوى نظرية

(١٠٦) متوازي الاضلاع المتحدان في القاعدة والارتفاع متكافئان (شكل ١٠١) أعني ان



متوازي الاضلاع  $أ ب ح د$  و  $أ هـ د$  المتحدان في القاعدة  $أ د$  وفي الارتفاع  $ح د$  هما متكافئان (وبالضرورة تكون قاعدتاها الآخران  $ب ح$  و  $هـ و$  على استقامة واحدة) وللهذه على ذلك يقال ان المثلثين  $أ هـ ب$  و  $د و ح$  فيهما

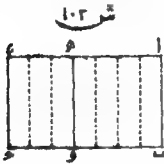
الضلع  $أ هـ$  = الضلع  $د و$  من خاصية متوازي الاضلاع  $أ هـ د$  والضلع  $أ ب$  = الضلع  $ح د$  من خاصية متوازي الاضلاع  $أ ب ح د$  والضلع  $ب هـ$  = الضلع  $و د$  لان كل واحد من الضلعين  $هـ و$  و  $ب ح$  يساوي  $أ د$  فاذا طرح من كل منهما البعد  $و ب$  يكون  $ب هـ$  =  $د و$  واذا فالتثلثان متساويان

ثم اذا طرح على التعاقب من الشكل الكلي  $أ هـ د$  المثلثان المذكوران كان الباقيان هما متوازي الاضلاع  $أ ب ح د$  و  $أ هـ د$  واذاً يكونان متكافئين وهو المطلوب

تنبيه - حيث ان أحد متوازي الاضلاع المعالومين يمكن أن يكون مستطيلاً فيكون متوازي الاضلاع والمستطيل المتحدان في القاعدة والارتفاع متكافئين

## دعوى نظرية

(١٠٧) النسبة بين المستطيلين المتحدى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما (شكل ١٠٢)



أعني ان النسبة بين المستطيلين  $أ ب د$  و  $أ و د$  المتحدى الارتفاع هو هي كالنسبة بين القاعدتين  $ب$  و  $و$

وللبرهنة على ذلك يفرض أولان القاعدتين  $ب$  و  $و$  متناسبتان وان النسبة بينهما كالنسبة بين العددين  $٧$  و  $٤$  فإذا قسمت القاعدة الاولى الى سبعة أقسام متساوية

فان الثانية تشتمل ضرورة على أربعة من هذه التقاسيم ثم إذا اقيمت من نقط التقاسيم أعمدة على القاعدة فإنه يتشكل سبعة مستطيلات جزئية متساوية يتركب منها المستطيل  $أ ب د$  وأما المستطيل  $أ و د$  فإنه يشتمل على أربعة منها وتكون النسبة حينئذيهما كالنسبة بين العددين  $٧$  و  $٤$  وهي عين النسبة بين القاعدتين  $ب$  و  $و$

وأما إذا لم تكن القاعدتان متناسبتين فإنه يبرهن على صحة هذه النظرية بعين الطريقة التي استعملت بفترة ٨ من الجزء الاول

نتيجة - حيث ان الضلعين المتجاورين من المستطيل يمكن تسمية احدهما قاعدة وثانيهما ارتفاعا بل افرق في ذلك أمكن ان يقال ان النسبة بين المستطيلين المتحدى القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما

## دعوى نظرية

(١٠٨) النسبة بين أي مستطيلين تساوى حاصل ضرب النسبة الكائنة بين قاعدتيهما في النسبة الكائنة بين ارتفاعيهما وذلك اذا مررنا بالمرز  $م$  و  $م$  للمستطيلين وبالمرز  $و$  و  $ع$  لقاعدة الاول وارتفاعه وبالمرز  $د$  و  $ع$  لقاعدة الثاني وارتفاعه ثم مررنا مستطيل ثالث بالمرز  $م$  ولقاعده وبالمرز  $و$  ولارتفاعه بالمرز  $ع$  أي فرض أنه متقدم مع أحد المستطيلين في القاعدة ومع الثاني في الارتفاع

تحصل بعقضى النظرية السابقة ونتيجتهما ان

$$\frac{ب}{و} = \frac{د}{ع} \quad \text{و} \quad \frac{ع}{د} = \frac{م}{م}$$

وبضرب هاتين المتساويتين في بعضهما طرفا بطرف تكون حواصل الضرب متساوية ويحدث

$$\frac{ع}{ع} \times \frac{ن}{ن} = \frac{م}{م} \quad \text{أو} \quad \frac{ن}{ن} \times \frac{ع}{ع} = \frac{م}{م}$$

وهو المطلوب

مثال - اذا قيست الابعاد ن و ع و ن و ع بوحدة ثمان وحدات الاطوال وليكن المتر مثلا وكانت مقاديرها هي على الترتيب  $\frac{٦}{٤}$  متر و  $\frac{٦}{٤}$  متر و  $\frac{٦}{٤}$  متر فانه يحدث

$$٤ = ٢ \times ٢ = \frac{٤}{٢} \times \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢}$$

أعني ان المستطيل م يشتمل على المستطيل م أربع مرات

### دعوى نظرية

(١٠٩) مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه

ولبرهنه على ذلك يقال لو فرضنا في النظرية السابقة ان م هو المربع المعتبر وحدة للسطوح وان كلامنا بعده ن و ع مساو لوحدة الاطوال فان المتساوية السابقة وهي

$$\frac{ع}{ع} \times \frac{ن}{ن} = \frac{م}{م}$$

تدل على ان مساحة المستطيل م تساوى حاصل ضرب مقياس قاعدته في مقياس ارتفاعه وهو المطلوب

تنبيه - هذه النظرية لا تكون حقيقية الا اذا كان وحدة السطوح هو المربع الذي ضلعه وحدة الاطوال وحيث ان النسبة  $\frac{ع}{م}$  تدل على مقتضى التعريف (١٠١) على مساحة

المستطيل م وان النسبتين  $\frac{ن}{ع}$  و  $\frac{ع}{م}$  تدلان على تنبجي تقدير الطولين ن و ع بوحدة

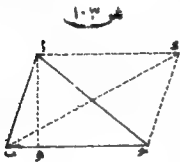
الاطوال أو على نتيجة مقاسهما أمكن أن يعبر عن مساحة المستطيل بهذا القانون  $ع \times ن = م$  مثال - اذا فرض ان ضلع المربع المعتبر وحدة هو المتر وقدره البعدان ن و ع وكان مقدارهما ٨ متر و ٤ متر تحصل  $٨ \times ٤ = ٣٢$  مترا مربعا

نتيجة ١ - حيث ان متوازي الاضلاع بكافئ المستطيل المتحد معه في القاعدة والارتفاع فتكون مساحته مساوية لحاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه

نتيجة ٢ - حيث ان المربع يمكن اعتباره كانه مستطيل ضلعا المجاوران متساويان فاذا كان  $a \times b = c^2$  دالاعلى مقام أحد أضلاعه فتكون مساحة المربع مساوية الى  $a \times b = c^2$

### د عوى نظرية

(١١٠) مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه (شكل ١٠٣)



بذلك من النقطتين أ و ب مستقيمان موازيان للضلعين ب و ج ، أب فيشكل من ذلك متوازي الاضلاع أب ج د ، التمدد مع المثلث أ ب ج فى القاعدة ب و ج وفى الارتفاع أ ه و حيث كان المثلث نصف متوازي الاضلاع (هـ رابعاً جـ ١) وكانت مساحة متوازي الاضلاع أ ب ج د تساوى ب ج  $\times$  أ ه فتكون مساحة

المثلث أ ب ج  $= \frac{1}{2} \times ب ج \times أ ه = \frac{1}{2} \times ج \times ع$  وهو المطلوب

نتيجة ١ - المثلثات المتعددة القاعدة ورؤسها على مستقيم مواز للقاعدة متكافئة لارتفاعها فى الارتفاع مثل المثلثين أ ب ج و د ه

نتيجة ٢ - حيث ان أى شكل كبير الاضلاع يمكن تقسيمه الى مثلثات بواسطة توصيل اقطاره فيمكن حينئذ تقدير مساحته بواسطة ضم مساح المثلثات المتركب هو منها على بعضها

### د عوى نظرية

(١١١) مساحة شبه المخرف تساوى حاصل ضرب ارتفاعه فى نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين

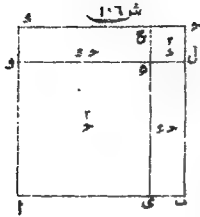
ش ١٠٤



(شكل ١٠٤) والبرهنة على ذلك يحول شبه المخرف الى متوازي أضلاع يكافئه بواسطة أن يمر من نقطة ج وسط الضلع د ه المستقيم ه و موازياً للضلع أب ويمد حتى يقابل القاعدتين فى النقطتين ه و و فتوازي الاضلاع الحادث أ ب ه ه يكون مكافئاً لنسبة المخرف أ ب ج د التمدد معه فى

الارتفاع لان المثلث ج ه د يساوى المثلث ه ج د لتساوى الضلع ج د للضلع ج د والزاوية





أولاً - المربع المتشأ على أحد الخطين

ثانياً - المربع المتشأ على الخط الثاني

ثالثاً - ضعف المستطيل الذي قاعدته أحد المستقيمين وارتفاعه المستقيم الآخر (شكل ١٠٦)

فإذا كان  $اى = ح$  أحد الخطين ، و  $ى = ب = د$  الخط الآخر ومجموعهما هو  $ا ب = ح + د$  وأنشأ المربع  $ا ب د$  على  $ا ب$  ثم من نقطة  $ى$  المستقيم  $ى ح$

موازيًا  $ا د$  وأخذ  $ا و = اى$  ومد  $و ل$  موازيًا  $ا ب$  تحصل أن

$$و هـ = د = ح = اى = ا و = ى هـ = ب ل = ح = د ,$$

$$هـ ل = ح = ح = ب ى = و د = هـ ح = ل ح = د$$

وحينئذ يكون  $اى هـ و$  هو المربع المتشأ على  $ح$  ، و  $هـ ل ح$  هو المربع المتشأ على  $د$

والشكلان  $ب ل هـ$  ، و  $هـ ح د$  هما مستطيلان متساويان ومتساويان في البعدين

$ح$  ، و  $د$  وبذلك ثبت المطلوب

تنبيه - إذا بدل  $ح$  ، و  $د$  على مقاسي الخطين  $اى$  ، و  $ب$  فإن  $ح + د$  يدل على مقاس

الخط  $ا ب$  وحيث أن مساحة المربع تساوى القوة الثانية لمقاس ضلعه فإنه يتوصل إلى

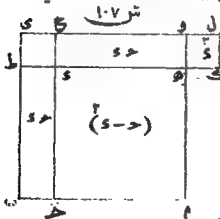
$$(ح + د)^2 = د^2 + ح^2 + ٢ ح د$$

وهو قانون يمكن البرهنة عليه بواسطة القواعد الحسابية

### د عوى نظرية

(١١٢) المربع المتشأ على فاضل خطين يكافئ مجموع مربعي ما ناقص ضعف مستطيلهما

(شكل ١٠٧)



فإذا كان  $ا ب = ح$  أحد الخطين ، و  $ب = د = س$  الخط

الثاني وفاضلها  $ا د = ح - د$  وأنشأ المربع  $ا ب د$  و

على  $ا ب$  ثم مد  $ى و$  على استقامته جهة  $و$  وأخذ

$و ل = ب = د = س$  ثم أخذ  $ا هـ = ا د = ح - د$  ورسم

المستقيم  $هـ ط$  موازيًا  $ا ب$  وأخذ على امتداده

(٢) التحفة البهية (ثاني)

هـ ك = ب ح ووصل ل ك ومن نقطة ح المستقيم ح ح موازيا أو نحصل

$$ا ب = ح ح = ح ل = ح$$

$$ب ح = طى = ل ك = د$$

وحينئذ يكون الشكل ا ح د هـ هو المربع المنشأ على ا ح أو على ح د والشكل هـ ك ل و هو المربع المنشأ على ب ح أو على د والشكلان ب ح ح و ح د ك ل هما مستطيلان متساويان قاعدة كل واحد منهما ح وارتفاعه د

فإذا طرحنا من الشكل الكلى الذى هو عبارة عن مجموع المربعين المستطيلين السابقين كان الباقي مساويا للمربع المنشأ على ا ح وهو المطلوب

تنبيه - إذا دلل العدداً ح و د على مقاسى الخطين ا ب و ب ح فيكون ح د د الأعلى مقاس الفرق بينهما واذن يكون

$$(ح - د) = د^2 + د^2 - د^2 = د$$

### دعوى نظرية

(١١٤) المستطيل المنشأ على مجموع خطين وقاضيهما يساوى الفرق بين مربعيهما (شكل ١٠٨)

فإذا كان ا ب ح أحد الخطين و ب ح د الخط

الآخر و ا ك = ح د + د مجموعهما و ا ح = ح د - د  
فاضلهما ثم أنشأ المربع ا ب و على ا ب وأخذ  
ا هـ = ا ح ورسم المستقيم هـ ل موازيا لى ا ب  
والمستقيمان ك ل و ح ح موازيين الى أو حدث  
أن ا ح د هـ هو المربع المنشأ على ا ح أو ح د  
وأن الشكل د طى ح هو المربع المنشأ على ب ح أو د

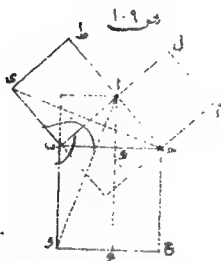
وأن الشكلين هـ د و و ل ك ط هما مستطيلان متساويان قاعدة كل واحد منهما  
مساوية ا ح أو ح د وارتفاعهما ب ح = د وحينئذ لو أسقط المربع د طى ح  
من المربع ا ب و ل كان الباقي متمكفاً للمستطيل ا ك ل هـ وذلك لان بينهما المستطيل  
ا ب ط هـ مشترك والباقي من المستطيل ا ك ل هـ هو المستطيل ب ك ل ط ومن المربع  
المستطيل د هـ و ح وحيث كان هذان المستطيلان الاخيران متساويين ثبت المطلوب



تنبيه - إذا دل العددا  $\alpha$  و  $\beta$  على مقاسي الخطين  $AB$  و  $\gamma$  فيكون  $\alpha + \beta = \gamma$  دالاً على مقاس مجموعهما و  $\alpha - \beta$  دالاً على مقاس فاضلهما ويكون  $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$

## دعوى نظرية

(١١٥) المربع المنشأ على وتر القائمة في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين منه (شكل ١٠٩) (هذه النظرية منسوبة إلى فيثاغورس)  
فإذا كان  $AB$  مثلثاً قائم الزاوية وأنشأت المربعات  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  على أضلعه الثلاثة وأنزل من الرأس  $A$  العمود  $AD$  على الوتر  $\gamma$  انقسم المربع  $\gamma$  إلى مستطيلين  $\alpha$  و  $\beta$  ويطلب البرهنة على أن المستطيل  $\alpha$  يكافئ المربع  $\alpha$  والمستطيل  $\beta$  يكافئ المربع  $\beta$



وللوصول إلى ذلك يوصل المستقيمان  $AD$  و  $AE$  ثم تصور دوران المثلث  $ADC$  حول نقطة  $C$  بمقدار زاوية قائمة فيقع الضلع  $CD$  على الضلع  $CA$  وتقع نقطة  $E$  على نقطة  $A$  وكذا ينطبق الضلع  $CE$  على الضلع  $CA$  وتقع نقطة  $F$  على نقطة  $A$  وحينئذ يكون المثلث  $ADC$  مساوياً للمثلث  $ABD$  ولكن المثلث  $ADC$  متصاعم المربع أي في القاعدة والارتفاع

فيكون نصفه وكذلك المثلث  $ABD$  وهو نصف المستطيل  $\alpha$  ولا تجداده معه في القاعدة والارتفاع وبناء عليه يكون المربع  $\alpha$  مكافئاً للمستطيل  $\alpha$  وبمثل ذلك يبرهن على تكافئ المربع  $\beta$  للمستطيل  $\beta$  وأن  $\alpha + \beta = \gamma^2$  وهو المطلوب

\* (ويمكن البرهنة على هذه النظرية بطريقة أخرى شكل ١١٠)

\* بأن يقال إذا كان  $AB$  وتر المثلث القائم الزاوية المقروض وأنشأ عليه المربع  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث يشمل المثلث ثم أنزل من نقطة  $C$  العمود  $CD$  على امتداد الضلع  $\beta$  فالمثلث القائم الزاوية  $\beta$  الحادث يكون مساوياً للمثلث  $ABD$  لأن فيهما الوتر  $\beta = AD$

- \* أب والزاوية ح = الزاوية ب أو لأن كل واحد منهما قائم زاوية أب و على قائم وحيث يكون الضلع ح = أو والضلع ح = ب و ويكون بناء عليه ح = أو - ب و  
 \* ثم إذا جرى في نقطة د عمل مشابه لما أجرى في نقطة ح  
 \* فإن المثلثين الحادين يكونان متساويين ومساويين  
 \* للمثلث أب و ويكون ع ل = ل ه = ه و = و ح  
 \* = أو - ب و وبالتأمل في الشكل يشاهد أن المربع  
 \* أب ح د يتركب من خمسة أجزاء وهي المربع و ح ل ه  
 \* وأربعة مثلثات متساوية قاعدة كل واحد منها ب و وارتفاعه أو ومساحة كل منها  
 \* مساوية  $\frac{1}{4}$  ب و  $\times$  أو

\* فإذا رمزنا بالرموز أ ، ب ، ح لاضلاع المثلث القائم الزاوية حدث

$$أ^2 = (ب - ح)^2 + 2 \times \frac{ب}{4} \times 2 = (ب - ح)^2 + ب ح$$

\* لكن  $(ب - ح)^2 = ب^2 - 2 ب ح + ح^2$  (١١٢) فبالاستعاضة يحدث

$$أ^2 = ب^2 + ح^2$$

\* وهو المطلوب

نتيجة ١ - يتوصل بالارتباط  $أ^2 = ب^2 + ح^2$  الى اي احدى ضلع من أضلاع المثلث القائم الزاوية متى علم الاثنان الآخران أعني يكون

$$أ^2 = ب^2 - ح^2 \quad \text{أو} \quad أ^2 = ب^2 - ح^2$$

نتيجة ٢ - تكافؤ المستطيلين ب ه و ح للمربعين ب ط و أ م يتوصل به الى هذين القانونين

$$أ ب \times ح = ب \times ح = ب \times ح \times ١ \quad \text{أو} \quad \frac{أ ب}{ب} = \frac{ح}{١}$$

$$أ ب \times ح = ح \times ح = ح \times ح \times ١ \quad \text{أو} \quad \frac{أ ب}{ح} = \frac{ح}{١}$$

ومنها

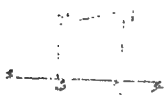
$$\frac{أ ب}{ب} = \frac{أ}{١}$$

أعني أن أي ضلع من ضلعي القائمة من المثلث القائم الزاوية وسط متناسب بين الوتر بينهما ووتر المجاور له وأن النسبة بين مربعي ضلعي القائمة مساوية للنسبة الكائنة بين سهمي الوتر  
نتيجة ٢ - إذا كان المثلث القائم الزاوية المعلوم  $AB$  متساوي الساقين بأن كل فيسه  $AB = AC$  فإنه يحدث بناء على ما قرأنا

$$AB^2 = AC^2 \quad \text{أو} \quad \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AB}{AC}$$

أعني أن القوة الثانية للنسبة الكائنة بين قطر المربع وضلعه هي ٢ وحيث تكون نفس هذه النسبة مساوية  $27$  ويحدث  $\frac{AB}{AC} = 27 = 144$

### تعريف



(١١٦) مسقط المستقيم  $AB$  (شكل ١١١) على المستقيم  $CD$  هو المستقيم  $AB$  المحصور بين موقعي العمودين النازلين من نهايتي المستقيم  $AB$  على المستقيم  $CD$

### دعوى نظرية

(١١٧) المربع المنشأ على الضلع المقابل لزاوية حادة من أي مثلث يكافئ مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين منه ناقص ضعف المستطيل الذي قاعدته أحد الضلعين المذكورين وارتفاعه مسقط الثاني عليه  
يمكن اعتبار حالتين في هذه الدعوى وهما على حسب وقوع العمود المسقط لضلع المثلث داخله أو خارجه

الحالة الأولى - (شكل ١١٢) نفرض أن الزاوية الحادة هي  $C$  وأن موقع العمود  $AD$  حاصل داخل المثلث على الضلع  $BC$



فيؤخذ من المثلث القائم الزاوية  $ABD$  أن  $AB^2 = AD^2 + BD^2$  لكن

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 \quad \text{و} \quad BD^2 = BC^2 - CD^2$$

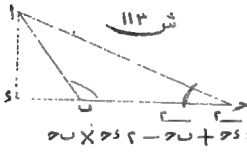
$$AB^2 = AC^2 - CD^2 + BC^2 - CD^2 = AC^2 + BC^2 - 2CD^2$$

وحينئذ يكون

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AD} - \overline{CD} + \overline{CD} + \overline{CD} - \overline{CD} \times \overline{CD} \text{ أو} \\ \overline{AB} &= \overline{AD} + \overline{CD} - \overline{CD} \times \overline{CD} \end{aligned}$$

وهو المطلوب

الحالة الثانية - (شكل ١١٣) نفرض أن الزاوية الحادة هي  $\angle$  وأن موقع العمود  $AD$  حاصل خارج المثلث على امتداد  $CD$  فيؤخذ من المثلث القائم الزاوية  $AD$  أن



$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{CD}$$

لكن

$$\overline{AD} = \overline{AD} - \overline{CD} + \overline{CD} \text{ و } \overline{AD} = \overline{AD} - \overline{CD} + \overline{CD} = \overline{AD} - \overline{CD} + \overline{CD} \times \overline{CD}$$

وحينئذ يكون

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AD} - \overline{CD} + \overline{CD} + \overline{CD} - \overline{CD} \times \overline{CD} \text{ أو} \\ \overline{AB} &= \overline{AD} + \overline{CD} - \overline{CD} \times \overline{CD} \end{aligned}$$

وهو المطلوب

## دعوى نظريه

(١١٨) المربع المنشأ على الضلع المقابل لزاوية منفرجة في أي مثلث منفرج الزاوية يكافئ مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين منه زائد ضعف المستطيل الذي قاعدته أحد الضلعين وارتفاعه مسقط الثاني عليه (شكل ١١٤)

نفرض أن  $\angle$  هي الزاوية المنفرجة وأن  $CD$  مسقط

الضلع  $AC$  على الضلع  $BC$

فيؤخذ من المثلث القائم الزاوية  $AD$  أن



$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{CD}$$

لكن

$$\overline{AD} - \overline{AC} = \overline{DC} \quad , \quad \overline{AD} = \overline{DC} + \overline{AC} = \overline{DC} + \overline{BC} + \overline{AB} \times \overline{DC}$$

وحينئذ يكون

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{DC} + \overline{BC} + \overline{AB} \times \overline{DC} = \overline{AC} + \overline{BC} + \overline{AB} \times \overline{DC}$$

وهو المراد

تنبيه - يستفاد من هذه النظرية والتي قبلها ان المثلث القائم الزاوية يتفرد دون غيره من المثلثات بهذا الارتباط وهو  $\overline{A} = \overline{B} + \overline{C}$

وحينئذ نقى وجد هذا الارتباط بين أضلاع أى مثلث فانه يحكم في الحال بأنه قائم الزاوية وعليه فالمثلث الذي مقاس أضلاعه هي ٥ و ٤ و ٣ هو قائم الزاوية لان  $\overline{5} = \overline{4} + \overline{3}$

## دعوى نظرية

(١١٩) مجموع مربعي أى ضلعين من أى مثلث يكافئ ضعف مربع المستقيم المتوسط المحصور بينهما إذا ضعف مربع نصف الضلع الثالث (المستقيم المتوسط هو المار بين رأس المثلث ومتوسط القاعدة) (شكل ١١٥)



فإذا كان أو المستقيم المتوسط بالنسبة للضلع  $\overline{BC}$  وكان  $\overline{AD}$  عمودا عليه تكون زاوية  $\overline{AOB}$  منفرجة ويتمحصل بمقتضى نظرية ثمرة (١١٨) ان

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{BO} + \overline{AO} \times \overline{BO} \quad (١)$$

وحيث ان زاوية  $\overline{AOC}$  حادة يتمحصل أيضا بمقتضى نظرية ثمرة (١١٧) أن

$$\overline{AC} = \overline{AO} + \overline{CO} - \overline{AO} \times \overline{CO} \quad (٢)$$

فإذا جمعت هاتان المتساويتان على بعضهما وجد أن  $\overline{AB} + \overline{AC} = ٢ \overline{AO}$  ويحدث

$$\overline{AB} + \overline{AC} = ٢ \overline{AO} + \overline{BO} + \overline{CO}$$

وهو المطلوب

تنبيه - اذار من الحروف ا ، ب ، ج لاضلاع المثلث والحروف ل ، م ، ن المستقيمان المتوسطان المقابلة لها حدث

$$\begin{aligned} & \overline{ا}^2 + \overline{ب}^2 = \overline{ن}^2 + \overline{ل}^2 \quad , \\ & \overline{ب}^2 + \overline{م}^2 = \overline{ا}^2 + \overline{ج}^2 \quad , \\ & \overline{ج}^2 + \overline{ن}^2 = \overline{ب}^2 + \overline{ل}^2 \end{aligned}$$

وهي متساويات يتوصل بها الى ايجاد مقادير المستقيمان المتوسطان اذا علم مقادير الاضلاع الثلاثة للمثلث والعكس

نتيجة ١ - مجموع مربعات أضلاع أى شكل متوازي الاضلاع يكافئ مجموع مربعي قطريه  
نتيجة ٢ - الفرق بين مربعي أى ضلعين من مثلث يكافئ ضعف المستطيل الذى قاعدته الضلع الثالث وارتفاعه مسقط المستقيم المتوسط عليه

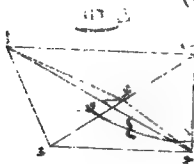
وذلك لانه لو طرحت المتساوية (٢) من المتساوية (١) السابقتين يحدث

$$\overline{ا}^2 - \overline{ب}^2 = \overline{ا}^2 - \overline{ب}^2 = \overline{ن}^2 - \overline{ل}^2 \quad \text{او} \quad \overline{ن}^2 - \overline{ل}^2 = \overline{ا}^2 - \overline{ب}^2$$

وهو المراد

## دعوى نظرية

(١٢٠) مجموع مربعات أضلاع أى شكل رباعي يكافئ مجموع مربعي قطريه زائداً أربعة أمثال مربع المستقيم الواصل بين منتصفى القطرين (شكل ١١٦)



فاذا كانت نقطة و وسط القطر احد ونقطة ه وسط القطر ب فانه يؤخذ من المثلث ا ب د أن (١١٩)

$$\overline{ا}^2 + \overline{د}^2 = \overline{ا}^2 + \overline{ه}^2 + \overline{د}^2 + \overline{ه}^2$$

وكذلك يؤخذ من المثلث ب د ح أن

$$\overline{ب}^2 + \overline{ح}^2 = \overline{ب}^2 + \overline{ه}^2 + \overline{ح}^2 + \overline{ه}^2$$

وبجمع هاتين المتساويتين على بعضهما يحدث

$$\overline{ا}^2 + \overline{ب}^2 + \overline{ج}^2 + \overline{د}^2 = \overline{ا}^2 + \overline{ب}^2 + \overline{ج}^2 + \overline{د}^2 + 4\overline{ه}^2$$

لكن المثلث  $أهـ$  يؤخذ منه أيضاً أن

$$أهـ + هـ = ز + و + ح + د$$

$$ز (أهـ + هـ) = ز (هـ + و + ح + د) = ز هـ + ز و + ز ح + ز د$$

ومع الاستعواض يحدث

$$أب + آد + دز + زح = بـ + د + ح + و + هـ$$

وهو المطلوب

نتيجة - إذا كان  $هـ$  و  $ع$  عصبياً بأن كان القطران ينصفان بعضهما فيكون الشكل متوازي الأضلاع ويكون مجموع مربعات أضلاعه مكافئاً لمجموع مربعي قطريه وبذلك قد توصلنا إلى النتيجة الأولى من النظرية السابقة وبالعكس إذا وجد في شكل رباعي أن مجموع مربعات أضلاعه يكافئ مجموع مربعي قطريه فيكون متوازي الأضلاع

## الفصل الثاني

في الخطوط المتناسبة

### دعوى نظرية

(١٢١) إذا قطع ضلعاً مثلثاً بمستقيم مواز لضعه الثالث فإنه يقسمهما إلى أجزاء متناسبة (نظرية طاليس) (شكل ١١٧)

أعني إذا كان  $هـ د$  موازياً لـ  $ب ح$  وقاطعاً للضلعين  $أ ب$  و  $أ ح$  فإنه يقسمهما إلى أجزاء متناسبة

والبرهنة على ذلك نفرض أولاً أن المستقيمين  $أ د$  و  $ب د$  متناسبان أي أنه يوجد بينهما مقياس مشترك خطي ينحصر في الأول ٣ مرات مثلاً وفي الثاني مرتين فتكون النسبة بينهما مساوية إلى  $\frac{٣}{٢}$



(٣) القضا اليه (ثاني)

ثم اذا متن نقط تقاسيم ا ب مستقيمت موازية د ح فان امتداداتهما تحصر بينهما  
المستقيم ا ح اجزاء متساوية أعني أن

$$ا ل = ل م = م ه = ه د = د ح$$

وذلك لانه اذا متن نقطى ل و ه مثلا المستقيمان ل ع و ه ك موازيين الى ا ب  
فالمستقيم ل ع يصير مساويا لى ع لكونهما متوازيين محصورين بين مستقيمين متوازيين  
وبعين هذا السبب يكون ه ك مساويا د و واذن يكون ل ع مساويا ه ك وبناء  
عليه يكون المثلثان ل ع م و ه ك متساويين لان قيمهما الضلع ل ع مساو للضلع ه ك  
والزاوية م ل ع مساوية للزاوية د ه ك لانهما زاويتان متناظرتان بالنسبة للمستقيمين  
المتوازيين ل ع و ه ك والقاطع ا د والزاوية م ع ل مساوية للزاوية د ه ك  
لتوازى أضلاعهما المتناظرة واتجاههما في جهة واحدة وينتج من تساويهما أن م ل = د ه  
وبمثل ذلك يبرهن على تساوى باقى اجزاء المستقيم ا ح وحينئذ فينقسم ا ه الى ثلاثة اجزاء  
متساوية وينقسم ه د الى جزأين متساويين وتكون النسبة بينهما مساوية الى  $\frac{ا ه}{د ه}$  وهى  
عن النسبة الكائنة بين ا د و د ه ويحدث  $\frac{ا د}{د ه} = \frac{ا ه}{د ه}$   
وأما اذا لم يكن المستقيمان ا د و د ه متساويين فانه يبرهن بمثل ما سبق ذكره مرة (٨٠ جزء أول)  
على أن النسبتين  $\frac{ا د}{د ه}$  و  $\frac{ا ه}{د ه}$  محصورتان بين عددين متوالين من اجزاء الاعشار أو من  
اجزاء المثين أو من اجزاء الالوف وهكذا واذن فهما متساويتان

نتيجة ١ - يمكن وضع التناسب  $\frac{ا د}{د ه} = \frac{ا ه}{د ه}$  على الصورة الآتية

$$(١) \quad \frac{ا د}{د ه} = \frac{ا ه}{د ه}$$

$$(٢) \quad \frac{ا د}{ا د + د ه} = \frac{ا ه}{ا ه + د ه} \quad \text{أو} \quad \frac{ا د}{ا د} = \frac{ا ه}{ا ه} \quad \text{أو} \quad \frac{ا د}{ا د} = \frac{ا ه}{ا ه}$$

$$(٣) \quad \frac{ا د + د ه}{د ه} = \frac{ا ه + د ه}{د ه} \quad \text{أو} \quad \frac{ا د}{د ه} = \frac{ا ه}{د ه} \quad \text{أو} \quad \frac{ا د}{ا د} = \frac{ا ه}{ا ه}$$

نتيجة ٢ - اجزاء المستقيمين ا ب و د ه المحصورة بين المستقيمت المتوازية ا ح و ه و  
ح ط و د الخ تكون متناسبة (شكل ١١٨)  
فاذا كانت م نقطة تلاقى المستقيمين ا ب و د فان المثلث م ه و يكون فيه المستقيم ا ح  
موازيا للقاعدتين ه و ب و يوحدهم أن

$$\frac{ا ه}{د ه} = \frac{ا ه}{د ه}$$



ويؤخذ أيضاً من المثلث ح ط ان

$$\frac{هه}{وط} = \frac{هه}{وط}$$

وبمقارنة هذا التناسب بالسابق ينتج ان

$$\frac{هه}{وط} = \frac{اه}{هو}$$

وبمثل ذلك يبرهن على أن

$$\frac{هه}{وط} = \frac{هه}{طس}$$

وحينئذ يكون

$$\frac{هه}{وط} = \frac{هه}{وط} = \frac{اه}{هو}$$

وهو المطلوب

## دعوى نظرية

(١٢٢) عكس النظرية السابقة صحيح أعني اذا قسم مستقيم ضلعي مثلث الى اجزاء متناسبة يكون موازياً للقاعدته (شكل ١١٩)



أعني اذا كان  $\frac{اه}{هو} = \frac{اه}{هو}$  يكون هه موازياً ب ح

والبرهنة على ذلك يقال ان لم يكن هه موازياً ب ح

لكان غيره د ه مثلاً ماراً بنقطة د ويحدث على مقتضى

النظرية السابقة ان  $\frac{اه}{هو} = \frac{اه}{هو}$  وبمقارنة هذا

التناسب بالتناسب المقروض وهو  $\frac{اه}{هو} = \frac{اه}{هو}$  يتصل منهما ان  $\frac{اه}{هو} = \frac{اه}{هو}$  وهو

تناسب فاسد لان بسط الكسر الاول او أصغر من بسط الكسر الثاني اه ومقام الاول

وح أكبر من مقام الثاني هه وحينئذ لا يمكن أن يكون د ه مستقيماً آخر خلاف هه

وهو المطلوب

## دعوى نظرية

(١٢٣) المستقيم النصف لاحتى زوايا مثلث أو المكمل لها يحدد على قاعدته أو على امتدادها

نقطة تكون النسبة بين بعديهما عن نهايتي

القاعدة مساوية للنسبة الكائنة بين بعدى

رأسه عن نهايتي القاعدة المذكورة (شكل ١٢٠)

(الحالة الاولى) - اذا كان المستقيم  $د$  منصفاً

للزاوية  $ب$   $ا$   $د$  يرسم من نقطة  $د$  المستقيم

$د$  موازياً  $ا$   $د$  ويمتد حتى يلاقى امتداد

المستقيم  $ب$   $ا$  في نقطة  $هـ$

فالمثلث  $ب$   $هـ$   $د$  الحادث فيه المستقيم  $ا$   $د$  مواز للقاعدة  $د$   $هـ$  فيقسم الضلعين

$ب$   $هـ$  و  $د$  الى اجزاء متناسبة (٢٢١) ويحدث

$$\frac{ب}{د} = \frac{ا}{د}$$

لكن المثلث  $ا$   $د$   $هـ$  متساوى الساقين لان فيه زاوية  $ا$   $د$  = زاوية  $د$   $ا$   $د$  حيث انهما

متبادلان داخلان بالنسبة للمستقيمين المتوازيين  $ا$   $د$  و  $د$   $هـ$  والقاطع  $ا$   $د$  وكذا فيه زاوية

$ا$   $د$  = زاوية  $ب$   $ا$   $د$  لانهما منظران بالنسبة لعين المستقيمين المتوازيين والقاطع  $ب$   $ا$

وحيث كان الزاويتان  $ب$   $ا$   $د$  و  $د$   $ا$   $د$  متساويتين فرضاً تكون الزاويتان  $ا$   $د$  و  $ا$   $د$

كذلك وحيث يكون الضلع  $ا$   $د$  = الضلع  $ا$   $هـ$

فاذا استعوض في التناسب السابق  $ا$   $هـ$  بمساويه  $ا$   $د$  يحدث  $\frac{ب}{د} = \frac{ا}{د}$  وهو المطلوب

(الحالة الثانية) - اذا كان المستقيم  $ا$   $د$  منصفاً للزاوية الخارجة  $د$   $ا$   $هـ$  المكمل لزاوية

$ب$   $ا$   $د$  يرسم من نقطة  $د$  المستقيم  $د$   $هـ$  موازياً للمستقيم  $ا$   $د$  ويمتد  $ا$   $د$  حتى يلاقى

امتداد القاعدة  $ب$   $د$  في نقطة  $و$

فالمثلث الحادث  $ب$   $ا$   $و$  فيه المستقيم  $د$   $هـ$  مواز لقاعدته او فيقسم الضلعين  $ب$   $ا$  و  $ب$   $و$

$$\frac{ب}{و} = \frac{د}{د}$$

لكن المثلث  $د$   $ا$   $هـ$  متساوى الساقين لان فيه زاوية  $د$   $ا$   $هـ$  = زاوية  $د$   $ا$   $هـ$  لانهما متبادلان

داخلتان بالنسبة للمستقيمين  $د$   $هـ$  و  $ا$   $د$  المتوازيين والقاطع  $ا$   $د$  وكذا زاوية  $ا$   $د$   $هـ$  تساوى

زاوية  $\alpha$  هـ لانهما متناظران بالنسبة لعين المستقيمين المتوازيين والقاطع  $\beta$  هـ وحينئذ يكون  $\alpha = \beta$  فاذا استعوض في التناسب السابق  $\alpha$  بـ  $\beta$  مساوياً وهو  $\alpha$  يحدث

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ وهو المراد}$$

\* نتيجة - يمكن أن يعرف بمذ كرا محل الهندسى للنقط التى تكون النسبة بين ابعادها

\* عن نقطتين ثابتتين  $\beta$  و  $\alpha$  مساوية نسبة معلومة  $\frac{\beta}{\alpha}$

\* والوصول الى ذلك يلاحظ أولاً أنه لا يوجد على المستقيم الجامع للنقطتين  $\beta$  و  $\alpha$  الا

\* نقطتان فقط تكون النسبة بين بعدى كل واحدة منهما عن النقطتين  $\beta$  و  $\alpha$  مساوية

\* للنسبة  $\frac{\beta}{\alpha}$  (شكل ١٢١)

\* أما بين النقطتين  $\beta$  و  $\alpha$  فإنه لا يوجد الانقطة

\* واحدة فقط مثل  $\alpha$  بحيث يكون  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$  لانه  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$  ش ١٢١

\* لو وجدت نقطة أخرى مثل  $\alpha$  وجدت  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$  وقورن هذا بالتناسب السابق

\* لحدث  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$  وهو تناسب ظاهر الفساد

\* ثم اذا فرض ان  $\alpha < \beta$  فأقول أيضاً انه لا يوجد الانقطة واحدة فقط على امتداد المستقيم

\*  $\beta$  و  $\alpha$  مثل نقطة  $\beta$  بحيث يكون  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$  وذلك لانه لو وجدت نقطة أخرى مثل

\* نقطة  $\beta$  وتحصل منها  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$  ثم قارنا هذا التناسب السابق لظهر أن

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \text{ أو } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$

\* وهو تناسب فساد بين

\* اذا قرر هذا وفرض ان  $\alpha$  احدى نقط المستوى موفية لهذا الشرط وهو  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$

\* (شكل ١٢٢)

\* فانه نصف الزاوية  $\alpha$  مـ بالمستقيم  $\alpha$  ش ١٢٢

\* فيحدث على مقتضى هذا النظرية أن

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}$$

ثم اذا نصفنا الزاوية الخارجة  $\alpha$  مـ بالمستقيم

$\alpha$  حدث أيضاً أن

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$$

\* وحينئذ يشاهد ان المستقيمين المنصفين زاويتي أى نقطة من نقط المحل الهندسى مثل نقطة م  
 \* يقابلان المستقيم ب فى نقطتين ثابتتين أ و د (حيث قد ثبت عدم امكان وجود غيرهما)  
 \* تكون النسبة بين بعدى كل واحدة منهما عن ب و د مساوية للنسبة  $\frac{2}{3}$   
 \* ولما كان المستقيمان المنصفان للزاويتين المتجاورتين المتكاملتين هما متعامدان ينتج حينئذ  
 \* ان جميع نقط المحل الهندسى كائنة على محيط الدائرة التى قطرها أ د  
 \* ويمكن البرهنة أيضا على عكس ما ذكر أعنى ان أى نقطة من نقط محيط الدائرة تكون احدى  
 \* نقط المحل الهندسى

\* وذلك لانه اذا كانت م احدى نقط المحيط (شكل ١٢٢) فصل م د و م ب وتنصف  
 \* زاوية د م ب بالمستقيم م أ والزاوية المكمله د م ه بالمستقيم م د وعند المستقيم  
 \* د ه موازيا م أ و د ه موازيا م د ويحدث

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12} \quad \text{وكذا يحدث} \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$$

\* ومنهما ينتج ان م ه = م د لكن حيث كانت زاوية د ه د فاعلم لان ضلعها موازيا  
 \* بالنظر للمستقيمين م أ و م د ينتج ان م ه = م د = م ه (لانه لو رسم محيط دائرة على  
 \* د ه وكان مركزه م فانه يمر بنقطة د ويكون فيه د م و م ه و م ه أنصاف أقطار)  
 \* واذن يحدث  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$  وهو المراد

## الفصل الثالث

فى تشابه الاشكال

### تعريف

(١٢٤) كثيرا الاضلاع المتشابهان هما اللذان تساوت زواياهما المتناظرة وتناسبت أضلاعهما  
 المتناظرة ونعني بالاضلاع المتناظرة فى كثيرى الاضلاع المتشابهين الاضلاع المجاورة لزوايا  
 متساوية

إذا دل عدد  $\delta$  على عدد أضلاع كل واحد من كثير أضلاع متشابهين فإن شرط تساوي زواياهما المتناظرة يتوصل به إلى تساويات عددها  $\delta - 1$  أو إلى شروط عددها  $\delta - 1$  وكذا شرط تناسب الأضلاع يتوصل به إلى تساويات أو تناسبات عددها  $\delta - 1$  وحينئذ فتعرف التشابه بقضى بأن الشكلين المتشابهين يجب أن يوفيا شروطها  $\delta - 1$  ومع ذلك فأنرى فيما يأتي أن تشابه الشكلين يكفيه فقط شرط عددها  $\delta - 1$

وأما المثلثان المتشابهان فهما اللذان تكون زواياهما المتناظرة متساوية وأضلاعهما المتناظرة مناسبة ونعني بالأضلاع المتناظرة هنا الأضلاع المقابلة للزوايا المتساوية

وتعرف تشابه المثلثات يحتاج إلى أربعة شروط وهي  $a = a, b = b, c = c$  و  $\frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c}$  إذا كان المثلثان هما  $abc$  و  $abc$

وسرى فيما يأتي أن وجود شرطين من هذه الشروط الأربعة في مثلثين يتوصل به إلى تحقيق وجود الشرطين الباقيين فيهما وحينئذ فهما كافيان لحصول التشابه

## المبحث الأول

### في تشابه المثلثات

(١٢٥) قبل التكلم على تشابه المثلثات نذكر هذه القاعدة

(١٢٦) (قاعدة) كل مستقيم يوازي قاعدة مثلث وقاطع ضلعيه الآخرین فإنه يحدد مثلثا مشابها للمثلث الأصلي

أعني إذا كان المستقيم  $de$  موازيا للقاعدة  $bc$  من المثلث  $abc$  وقاطعا للضلعين  $ab$  و  $ac$  (شكل ١٢٣) يكون المثلث  $ade$  مشابها للمثلث  $abc$  وللبهنة على ذلك يقال أولا - أن زوايا المثلثين متساوية لأن زاوية  $a$  مشتركة بينهما وزاوية  $ade = زاوية abc$  بالنظر ومثلهما الزاويتان  $ade$  و  $b$



ثانيا - إذا مد المستقيم  $de$  موازيا للمستقيم  $bc$  فإنه يحدث على مقتضى نظرية طاليس غرة ١٢١ وإلى هذه التساويات

$$\frac{ad}{ab} = \frac{ae}{ac} = \frac{de}{bc}$$

وحيث كان  $و = د$   $هـ$  لكونهما متوازيين محصورين بين مستقيمين متوازيين يحدث

$$\frac{د}{و} = \frac{ا هـ}{ا ب} = \frac{ا د}{ا ب}$$

وهو المراد

## دعوى نظرية

(١٢٧) اذا تساوت الزوايا المتناظرة من مثلثين تناسبت أضلاعهما المتناظرة ويكونان اذن متشابهين (شكل ١٢٤)

أعني اذا كانت زاوية  $ا = ا$  و  $ب = ب$  و  $د = د$  يكون

$$\frac{د}{و} = \frac{ا د}{ا ب} = \frac{ا ب}{ا ب}$$

وللبرهنة على ذلك يؤخذ  $ا د = ا ب$  ويرسم المستقيم  $د هـ$  موازيا للفاصل  $ب د$  فالمثلث الحادث  $ا د هـ$  يكون مشابها للمثلث  $ا ب د$  (فائدة عمرة ١٢٦) وتكون زاوية  $ا د هـ =$  زاوية  $ب د هـ$  وزاوية  $ا هـ د =$  زاوية  $د هـ ب$  ويكون أيضا

$$(١) \quad \frac{د}{و} = \frac{ا د}{ا هـ} = \frac{ا ب}{ا د}$$

وحيث نعلم سبق علينا سوى البرهنة على ان المثلث  $ا د هـ$  يساوي المثلث  $ا ب د$  وهي تحتاج الى البرهنة على ان زاوية  $ا د هـ = ب د هـ$  وللوصول الى ذلك يقال ان زاوية  $ا د هـ =$  زاوية  $ب د هـ$  بالمتناظر وهذه الزاوية الاخيرة تساوي زاوية  $ب د هـ$  فزوايا  $ا د هـ =$  زاوية  $ب د هـ$  وينتج من تساوي المثلثين ان  $ا هـ = ا د$  و  $د هـ = ب د$  فاذا ابدل في المتساوية (١) الاضلاع  $ا د$  و  $ا هـ$  و  $د هـ$  بعكسها ويحدث

$$\frac{د}{و} = \frac{ا د}{ا ب} = \frac{ا ب}{ا ب}$$

وهو المطلوب

نتيجة ١ - المثلثان اللذان أضلاعهما المتناظرة متوازية أو متعامدة يكونان متشابهين (عمرة ٥١ جزء أول)

نتيجة ٢ - يكفي لتشابه مثلثين تساوى زاويتين من أحدهما النظرية من الأولى وحينئذ  
فيكون لتشابه مثلثين قائم الزاوية مساواة زاوية حادة من أحدهما النظرية من الثانية

## دعوى نظرية

(١٢٨) إذا تناسبت الاضلاع المناظرة من مثلثين تساوت زواياهما المناظرة ويكونان إذن  
متشابهين (شكل ١٢٤)

وللبرهنة على ذلك يؤخذ  $ا د = ا ب$  ويرسم  $د ه$  موازيا للقاعدة  $ب ح$  فيكون المثلث  
 $ا د ه$  مشابها للمثلث  $ا ب ح$  كما تقدم وتكون زاوية  $ا د ه =$  زاوية  $ب$  وزاوية  $ا ه د =$   
زاوية  $ح$  ويتوصل أيضا

$$(١) \quad \frac{ا ب}{د ه} = \frac{ا ح}{ا ه} = \frac{ب ح}{د ح}$$

وحينئذ فليبق سوى البرهنة على تساوى المثلثين  $ا د ه$  و  $ا ب ح$   
والوصول الى ذلك يقال يؤخذ من المنطوق ان

$$\frac{ا ب}{د ه} = \frac{ا ح}{ا ه} = \frac{ب ح}{د ح}$$

وبمقارنة هذا التناسب بالتناسب (١) مع ملاحظة أن  $ا د = ا ب$  فاننا نستنتج مباشرة ان  
 $ا ح = ا ه$  و  $ب ح = د ح$  وبذلك يكون المثلثان المذكوران متساويين وتكون زاوية  
 $ا = ا$  وزاوية  $ا ه د = د ه ح$  وزاوية  $ا ه د = ب ح د$  وهو المراد  
نتيجه - يجب ان يلاحظ هناك الزوايا المتساوية في المثلثين المتشابهين هي المقابلة للاضلاع  
المتناسبة

## دعوى نظرية

(١٢٩) اذا تساوت زاويتين من مثلث زاوية أخرى من مثلث آخر وكان الضلعان المحيطان بزاوية  
المثلث الاول مناسبين للضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثاني يكون المثلثان متشابهين  
(شكل ١٢٤)

أعني اذا كانت زاوية  $ا =$  زاوية  $ا$  وكان  $\frac{ا ب}{ا ح} = \frac{ا ب}{ا ح}$  يكون المثلثان  $ا ب ح$  و  $ا ب ح$   
متشابهين

(٤) القصة البهية (ثاني)

والبرهنة على ذلك يؤخذ  $ا = ا$  و  $ب = ب$  ويرسم  $د ه$  موازاً للقاعدة  $ب ح$  فيكون المثلث الحادث  $ا د ه$  مشابهاً للمثلث  $ا ب ح$  والبرهنة على تساوي المثلث  $ا د ه$  للمثلث  $ا ب ح$  يؤخذ من المثلثين المتشابهين  $ا ب ح$  و  $ا د ه$  ان  $\frac{ا ب}{ا د} = \frac{ب ح}{د ه}$  وبمقارنة هذه المتساوية بالمقروضة وهي  $\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ب ح}{د ه}$  مع ملاحظة أن  $ا = ا$  ينتج أن  $ا د = ب ح$  وأن في تساوي المثلثان المذكوران وهو المراد

تنبيه - قد ذكرنا بمرة ١٢٤ (تعريف) ان تشابه المثلثين يقتضى ان يقرأ أربعة شروط فيهما ثم ذكرنا ان وجود اثنين منها كافى لتحقيق وجود الاثنين الآخرين وماسلكناه في هذه النظرية وسابقتها بمحقق لما ذكر وذلك لانه قد فرض في نظرية (مرة ١٢٧) ان  $ا = ا$  و  $ب = ب$  وأثبتنا ان  $\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ب ح}{د ه} = \frac{ا د}{د ه}$  وكذا قد فرض في نظرية (مرة ١٢٨) ان  $\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ا د}{د ه}$  وأثبتنا ان  $ا = ا$  و  $ب = ب$  وفي نظرية (مرة ١٢٩) قد فرض ان  $ا = ا$  و  $\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ا د}{د ه}$  وأثبتنا ان  $\frac{ب ح}{د ه} = \frac{ا د}{د ه}$  و  $\frac{ب ح}{د ه} = \frac{ا ب}{ا ب}$

### دعوى نظرية

(١٣٠) المستقيمان الواصلان من رأس المثلث الى قاعدة تقسم هذه القاعدة وموازاهما الى اجزاء متناسبة (شكل ١٢٥) أعنى يكون



$$\frac{ب}{ب} = \frac{د}{د} = \frac{ح}{ح} = \frac{ا ب}{ا ب}$$

والبرهنة على ذلك يؤخذ من المثلثات المتشابهة المتركة منها الشكل سلسلة هذه النسب المتساوية

$$\frac{ب}{ب} = \frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ا د}{ا د} = \frac{د ه}{د ه} = \frac{ا ه}{ا ه} = \frac{ب ح}{ب ح} = \frac{ا ح}{ا ح}$$

وبذلك ثبت النظرية

تنبيه - يشاهد ما ذكرنا النسبة الثابتة الكائنة بين الاجزاء المتناظرة من المستقيمين المتوازيين مثل  $ب ح$  و  $ا ب$  هي عين النسبة الكائنة بين أى قاطع وجزءه الاول نتيجة - عكس هذه النظرية صحيح وتسهل البرهنة عليه



## دعوى نظرية

(١٣١) اذا أنزل من رأس المثلث القائم الزاوية عمود على وتره فانه يحدث  
أولاً - ان المثلثين الجزئيين يكونان متشابهين ويكون كل واحد منهما متشابهاً للمثلث الاصلى  
ثانياً - ان كل ضلع من ضلعي القائمة يكون وسطاً متناسباً بين الوتر وتعلمه وبين مسقطه عليه  
ثالثاً - ان العمود يكون وسطاً متناسباً بين سهمي الوتر (شكل ١٢٦)  
فإذا كان  $AB \sim AC$  مثلثاً قائم الزاوية في  $A$  ،  $AD$  هو العمود  
و  $D$  مسقط الضلع  $AB$  على الوتر و  $DC$  مسقط الضلع  
 $AC$  عليه فانه يبرهن على الاحوال الثلاثة كما يأتى  
أولاً - ان المثلثين  $ABD$  و  $ACD$  القائمي الزاوية فهما  
زاوية  $B$  مشتركة فيكونان متشابهين (نتيجة ٢ غمرة ١٢٧)  
ومثلهما المثلثان  $ADC$  و  $ABD$  القائمي الزاوية لان فيهما زاوية  
 $C$  مشتركة بينهما وحينئذ فيكون المثلثان الجزئيان  $ABD$  و  $ADC$  متشابهين لتساوى  
زواياهما المتناظرة

ثانياً - حيث ان المثلثين  $ABD$  و  $ACD$  متشابهان يحصل

$$(١) \quad \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AD}$$

وكذلك يؤخذ من المثلثين  $ADC$  و  $ABD$  المتشابهين هذا التناسب

$$(٢) \quad \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AD}$$

ثالثاً - حيث ان المثلثين الجزئيين  $ABD$  و  $ADC$  متشابهان يحصل أيضاً أن

$$\frac{AD}{AD} = \frac{AD}{AD} \text{ وهو المراد}$$

نتيجة ١ - اذا اعتبرنا أن الخطوط مقومة بأعداد فاننا نستخرج من تناسبي (١) و (٢) أن

$$AB \times AC = AD^2 \text{ و } AD \times AD = AD^2$$

وهما متساويتان تدلان على سطوح متكافئة وتوصل منهما الى ما سبق البرهنة عليه من أن مربع  
أى ضلع من ضلعي القائمة في المثلث القائم الزاوية يكافئ المستطيل المجاور له الذى هو جزء من  
المربع المنشأ على وتر القائمة المحدباً امتداد العمود النازل من رأس الزاوية القائمة على وترها  
غمرة ١١٥ ولوجع هاتان المتساويتان على بعضهما الحذف

$$\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = (\overline{AD} + \overline{DB}) \times \overline{AB}$$

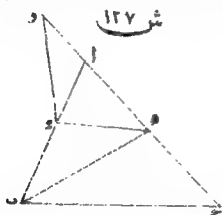
ومن هذه المساوية يعلم أنه قد وصل الى البرهنة على نظرية فيثاغورس بواسطة تشابه المثلثات نتيجة ٢ - اذ امرن بالرموز  $\overline{AB}$  و  $\overline{AD}$  و  $\overline{DB}$  و  $\overline{AC}$  لاضلاع المثلث القائم الزاوية ولا ارتفاعه فانه يحدث من المثلثين المتشابهين  $\overline{AB}$  و  $\overline{AD}$  و  $\overline{AB}$  أن

$$\overline{AB} \times \overline{AB} = \overline{AD} \times \overline{AB} \quad \text{ومنه} \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DB}}$$

وهي مساوية حقيقية لدلالة كل طرف منها على ضعف مساحة المثلث القائم الزاوية

### دعوى نظرية

(١٣٢) اذا اشترك مثلثان في زاوية تكون النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الاول الى مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثاني (شكل ١٢٧) أعني اذا اشترك المثلثان  $\overline{AB}$  و  $\overline{AD}$  في زاوية  $\angle A$  يكون



$$\frac{\overline{AB} \times \overline{AD}}{\overline{AD} \times \overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$$

وللبرهنة على ذلك يوصل المستقيم  $\overline{DE}$  فالمثلث  $\overline{ADE}$  متحد مع المثلث  $\overline{AB}$  في الارتفاع فتكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتهما أعني يكون

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$$

وكذا حيث أن المثلثين  $\overline{ADE}$  و  $\overline{AB}$  متحدان في الارتفاع يحدث

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$$

وبضرب هاتين المساويتين في بعضهما وحذف العامل المشترك  $\overline{AB}$  يحدث

$$\overline{AD} = \overline{AE} \quad \text{وهو المراد} \quad \frac{\overline{AB} \times \overline{AD}}{\overline{AD} \times \overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}}$$

تنبيه - اذا تم المستقيم  $\overline{DE}$  جهة  $\overline{A}$  وأخذ عليه البعد  $\overline{AD} = \overline{AE}$  ووصل  $\overline{DE}$  فالمثلث الحادث  $\overline{ADE}$  يكون مكافئاً للمثلث  $\overline{AB}$  لا تحلدهما في القاعدة والارتفاع غير أن

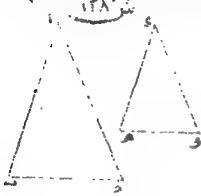
في زاوية و اء مكملة لزاوية ه اء وحيث اذا أبلى في المتساوية السابقة المثلث ا ه و  
بالمثلث المكافئ له اء و والضلع ا ه بالضلع المساوئ له او يحدث

$$\frac{ا ب \times ا ح}{ا و \times ا س} = \frac{ا ب}{ا و}$$

أعني أنه اذا وجد في مثلثين زاويتان متكاملتان فتكون النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيل  
الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الاول الى مستطيل الضلعين المحيطين بزاوية المثلث الثاني

### دعوى نظرية

(١٢٣) نسبة محيطي المثلثين المتشابهين الى بعضهما كالنسبة بين أي ضلعين متناظرين فيهما  
والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعي أي ضلعين متناظرين فيهما أيضا (شكل ١٢٨)  
برهان الاول يقال يؤخذ من تشابه المثلثين أن



$$\frac{ا ب}{و ه} = \frac{ا ح}{ز ه} = \frac{ا ب + ا ح + ا و}{و ه + ز ه + و ه} \quad \text{أو} \quad \frac{ا ب}{و ه} = \frac{ا ح}{ز ه} = \frac{ا ب}{و ه}$$

$$\frac{ا ب}{و ه} = \frac{\text{محيط المثلث ا ب ح}}{\text{محيط المثلث و ه ز}} \quad \text{أو}$$

وبرهان الثاني يقال يؤخذ أيضا من تشابه المثلثين أن

$$\frac{ا ب}{و ه} = \frac{ا ح}{ز ه}$$

وحيث كانت زاوية ا = زاوية و فيحدث على مقتضى ما تقر في النظرية السابقة أن

$$\frac{ا ب}{و ه} \times \frac{ا ح}{ز ه} = \frac{ا ب \times ا ح}{و ه \times ز ه} \quad \text{أو} \quad \frac{ا ب}{و ه} = \frac{ا ب \times ا ح}{و ه \times ز ه}$$

$$\text{وحيث ان } \frac{ا ب}{و ه} = \frac{ا ح}{ز ه} \text{ يحدث}$$

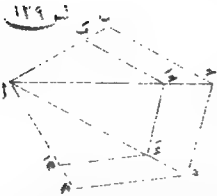
$$\frac{ا ب}{و ه} = \frac{ا ب}{و ه} \times \frac{ا ح}{ز ه} = \frac{ا ب \times ا ح}{و ه \times ز ه}$$

وهو المطلوب

## المبحث الثاني في تشابه كثيرات الاضلاع

### دعوى نظرية

(١٣٤) اذا علم أى شكل كثير الاضلاع فإنه يمكن دائماً رسم آخر بحيث يكون هو والعلوم مركبين من عدد واحد من المثلثات المتشابهة صورة ووضعا (شكل ١٢٩)



فإذا كان  $أ ب ح د ه$  شكلا كثيرا لاضلاع معلوما ووصل من رأسه  $أ$  قطراه  $أ ح$  و  $أ د$  ثم فرضت نقطة  $ب$  اختيارية على الضلع  $أ ب$  ومد منها المستقيم  $ب د$  موازيا إلى  $ب ح$  ثم مد المستقيم  $د ك$  موازيا إلى  $د ه$  والمستقيم  $د ه$  موازيا إلى  $د ه$  فإن المثلثات الحادثة  $أ ب د$  و  $أ ح د$  و  $أ د ه$  تصير متشابهة بالنظر للمثلثات  $أ ب د$  و  $أ ح د$  و  $أ د ه$

واذن فالشكلان  $أ ب ح د ه$  و  $أ ب د ك ه$  اللذان يمكن اعتبار وضع أحدهما بالنسبة للآخر بطريقة ما قدر زيك من مثلثات متشابهة متحدة العدد ومماثلة في الوضع وهو المراد

### دعوى نظرية

(١٣٥) كثيرا لاضلاع المركبان من مثلثات متشابهة متحدة في العدد ومماثلة في الوضع (١٣٤) هما متشابهان (شكل ١٣٠)



فإذا فرض أن المثلثات  $أ ب ح$  و  $أ ح د$  و  $أ د ه$  متشابهة بالنظر للمثلثات  $أ ب د$  و  $أ ح د$  و  $أ د ه$  وكانت مماثلة في الوضع يكون الشكلان  $أ ب ح د ه$  و  $أ ب د ك ه$  متشابهين أعني أن زواياهما المتناظرة تكون متساوية وأضلاعها المتناظرة تكون متناسبة

وللبرهنة على ذلك يقال أمّا تساوى الزوايا المتناظرة من الشكلين فهو نتيجة تشابه المثلثات لأن منها ما هو عبارة عن زاويتين متناظرتين من مثلثين متشابهين مثل  $ب$  و  $ب$  و  $د$  و  $د$  ومنها ما هو عبارة عن مجموع زوايا متناظرة من عدة مثلثات متشابهة مثل زاوية  $أ$  و

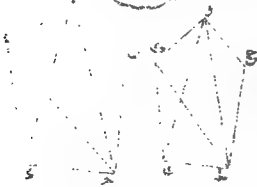
وأما تناسب الاضلاع المناظرة فهو نتيجة تشابه المثلثات أيضا حيث يتوصل منه الى سلسلة التناسبات الآتية

$$\frac{أب}{أب} = \frac{بج}{بج} = \frac{جأ}{جأ} = \frac{أد}{أد} = \frac{ده}{ده} = \frac{هأ}{هأ}$$

نتيجه - يؤخذ من سلسلة التناسبات هذه أن النسبة بين أى قطرين متناظرين مساوية للنسبة الكائنة بين أى ضلعين متناظرين من كثيرى الاضلاع  
نتيجة - اذا دلّ ٥ على عدد أضلاع كل واحد من الشكلين المقروضين فان عدد المثلثات المتركب منها كل واحد منهما يكون مساويا ضرورة الى (٥-٢) وحيث ان تشابه أى مثلثين متناظرين منهما يحتاج الى شرطين فيكون عدد الشروط اللازمة لتشابه كثيرى الاضلاع مساويا ضرورة الى ٢ (٥-٢) = ٣ - ٤ وهو موافق لما سبق التنويه عنه (بنقرة ١٢٤ تعرف)

### دعوى نظرية

(١٣٦) وبالعكس كثيرا الاضلاع المتشابهان يتركان من مثلثات متشابهة متحدة في العدد ومتمثلة في الوضع (شكل ١٣١)



وللبرهنة على ذلك يمد من نقطة أ إحدى رؤس الشكل أب ح د ه قطراه أ د و أ ح ثم يمد أيضا من نقطة و إحدى رؤس الشكل و ح ط ي ك المناظرة للرأس أ قطراه وى و و ط ثم يقال حيث أن الشكلين المقروضين متشابهان تكون زاوية أب ح مساوية لنظيرتها و ح ط

ويكون الضلعان أب و ح مناسبين للضلعين و ح و ح ط أعنى أن

$$\frac{أب}{و ح} = \frac{ب ح}{ح ط}$$

وحيث يكون المثلثان أب ح و ح ط متشابهين (١٣٢) لاشتراكهما في زاوية محصورة بين أضلاع متناسبة وينتج من تشابههما أن زاوية ب ح أ = زاوية ح ط و

ثم اذا طرح هاتان الزاويتان المتساويتان من الزاويتين المتساويتين ب ح د و ح ط ي كان الزاويتان الباقيتان أ ح د و و ط ي متساويتين ضرورة لكنه حيث كان المثلثان

$$أب ح و و ح ط متشابهين يحدث \frac{أب}{و ح} = \frac{ب ح}{ح ط}$$

وكذا يؤخذ من تشابه كثير الاضلاع أن

$$\frac{ج د}{ط ي} = \frac{ح د}{ط ي} \quad \text{واذن يكون} \quad \frac{ج د}{ط ي} = \frac{ح د}{ط ي}$$

وحيث انه قد سبق البرهنة على أن زاوية  $ا د =$  زاوية  $ط ي$  يكون المثلثان  $ا د و ط ي$  متشابهين لا شعرا كما في زاوية محصورة بين أضلاع متناسبة وبمثل ذلك يبرهن على تشابه باقي المثلثات مهما كان عدد أضلاع الشكلين المقروطين وبذلك يثبت المطلوب

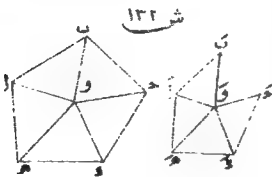
### تعريف

(١٣٧) أي نقطتين مثل  $و و$  مأخوذتين في مستويي شكلين متشابهين مثل  $ا ب ح د ه و$  و  $ا ب ح د ه و$  يقال لهما مناظران متى وصل من كل منهما الى نهايي ضلعين متناظرين من الشكلين المذكورين مثل  $ا ب$  و  $ا ب$  وكان المثلثان المخلدان  $ا ب و$  و  $ا ب و$  متشابهين (شكل ١٣٢) وأما المستقيمان المتناظران بالنسبة لشكلين متشابهين فهما الواصلان بين نقط متناظرة بالنسبة للشكلين المذكورين

### دعوى نظرية

(١٣٨) اذا وصلت كل واحدة من النقطتين المتناظرتين  $و و$  بالنسبة للشكلين المتشابهين  $ا ب ح د ه و$  و  $ا ب ح د ه و$  الى كل رأس

من رؤس الشكل المنسوبة اليهما فان المثلثات الحادثة في الشكلين تكون متشابهة النظرية أعني يكون المثلث  $و ب ح$  مشابها للمثلث  $و ب ح$  والمثلث  $و د ح$  مشابها للمثلث  $و د ح$  وهكذا (شكل ١٣٢)



والبرهنة على ذلك يقال

حيث كان الشكلان المقروضان متشابهين تكون زاوية  $ا ب ح =$  زاوية  $ا ب ح$  وحيث كانت أيضا زاوية  $ا ب و =$  زاوية  $ا ب و$  من تشابه المثلثين  $ا ب و$  و  $ا ب و$  تكون ضرورة زاوية  $و ب ح =$  زاوية  $و ب ح$

لكنه يؤخذ أولاً من تشابه الشكلين ان  $\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac}$  ويؤخذ ثانياً من تشابه المثلثين  $ABO$  و  $ABO$  أن  $\frac{AB}{AO} = \frac{ab}{ao}$  وحيث يكون  $\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac}$  و  $\frac{AB}{AO} = \frac{ab}{ao}$  وحيث قد ثبت أن زاوية  $BOA =$  زاوية  $boa$  يكون المثلثان  $BOA$  و  $boa$  متشابهين وبمثل ذلك يبرهن على تشابه باقي المثلثات النظر لتطبيقاته  
تنبيه - ويمكن البرهنة بطرق مماثلة المقدمة على ان النسبة بين أى مستقيمين متناظرين بالنسبة للشكلين هي عين النسبة الكائنة بين أى ضلعين متناظرين منهما

### دعوى نظرية

(١٣٩) النسبة بين محيطى أى شكلين متشابهين كالنسبة بين ضلعين متناظرين فيهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعي الضلعين المذكورين (شكل ١٢٩)  
برهان الاول - يقال حيث كان الشكلان متشابهين يحدث

$$\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac} = \frac{AO}{ao} = \frac{BO}{bo} = \frac{CO}{co}$$

ومن سلسلة هذه التناسبات يؤخذ أن

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB + BO + OC}{AC + CO + OA} = \frac{ab + bo + oc}{ac + co + oa}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\text{محيط } ABOC}{\text{محيط } aboc} \text{ وهو المطلوب}$$

وبرهان الثانى - يقال حيث كان المثلثان  $ABC$  و  $abc$  متشابهين يحدث (١٢٢)

$$\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac} \text{ وكذا حيث كان المثلثان } ABC \text{ و } abc \text{ متشابهين يكون}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB + BO + OC}{ac + co + oa}$$

ومن هذين التناسبات يؤخذ أن

$$\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac}$$

(٥) التحفة البهية (ثاني)

وبمثل ذلك يبرهن على أن  
وحيث أن يكون

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{AD + DB + BC} = \frac{AB}{AD + DB + BC} \text{ أو } \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{DB} = \frac{AB}{BC}$$

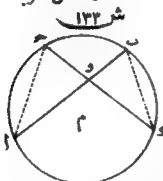
أو  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\text{سطح } ABC}{\text{سطح } ADC}$  وهو المطلوب

## الفصل الرابع

في أوتار الدائرة وقواطعها

### دعوى نظرية

(١٤٠) إذا تقاطعت وتران داخل دائرة فإن حاصل ضرب جزأى أحدهما مساو لحاصل ضرب جزأى الثانى (شكل ١٣٣) فإذا تقاطعت الوتران  $AB$  و  $CD$  في نقطة  $O$  يجب أن يكون



$$AO \times OB = CO \times OD$$

والبرهنة على ذلك يوصل المستقيمان  $AO$  و  $BO$  فالتثلثان  $AOB$  و  $COD$  يكونان متشابهين لتساوى الزوايا المتناظرة فهما حيث أن زاوية  $AOB =$  زاوية  $COD$  لتقابلهما بالرؤس وأن زاوية  $AOB =$  زاوية  $COD$  لاتحادهما في المعيار وهو  $\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO}$  وأن فتكون أضلاعهما متناسبة ويحدث

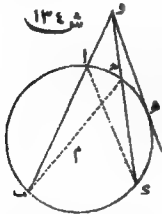
$$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{DO} \text{ ومنه } AO \times OB = CO \times OD \text{ وهو المطلوب}$$

- \* نتيجة - حاصل الضرب  $AO \times OB$  الذى لا يتغير مهما تغير وضع الوتر  $AB$  لا يرتبط
- \* الأوضع النقطة و فإذا مر بمركز الدائرة وبالرؤس  $O$  لنصف
- \* قطر الدائرة ومد من نقطة و قطر حدث ضرورة  $L$  و  $AO \times OB = (O + L)(O - L)$
- \*  $OL = O - L$  ويسمى المقدار  $(O - L)$  بقوة نقطة و



## دعوى نظرية

(١٤١) اذا مد من نقطة خارج دائرة قاطعان لها فان حاصل ضرب أحد القاطعين بتمامه في جزئه الخارج يكون مساويا لحاصل ضرب القاطع الثاني بتمامه في جزئه الخارج (شكل ١٣٤)



أعني ان  $و \times أ = و \times ب$  وللبهنة على ذلك يوصل المستقيمان  $ج$  و  $د$  فالثلاثان الحادثان  $و \times ج$  و  $و \times د$  فيهما زاوية مشتركة وزاوية  $ب = د$  زاوية لا تتحدهما في المعيار فيكونان متشابهين ويحدث

$$\frac{و}{د} = \frac{ج}{أ} \text{ أو } و \times أ = و \times ب$$

وهو المطلوب

\* تنبئة - اذا مر من جرف  $د$  لبعدة نقطة  $و$  عن المركز وبالمركز  $و$  لنصف قطر الدائرة  
\* ثم وصل بين نقطة  $و$  والمركز بمستقيم ومد على استقامته فانه يشاهد ان حاصل الضرب  
\* الثابت  $و \times أ$  مساو لـ  $(د + و) (د - و) = د^2 - و^2$  وتسمى هذه الكمية  
\* بقوة نقطة  $و$

تنبيه - اذا تصورنا تحرك القاطع  $و$  حول نقطة  $و$  شيئا فشيئا بحيث تقرب النقطتان  $ج$  و  $د$  من بعضهما فانه عندما يتحد النقطتان المذكورتان يأخذ المستقيم  $د$  الوضع  $و$  هـ ويكون مماسا لمحيط الدائرة ويؤول كل واحد من البعدين  $و$  و  $ج$  الى البعد  $و$  ويكون بناء على ذلك

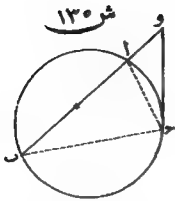
$$و \times هـ = و \times أ \text{ أو } \frac{و}{هـ} = \frac{و}{أ}$$

أعني أن المماس يكون وسطا متناسبا بين القاطع بتمامه وجزئه الخارج ومع ذلك فانه يمكن البرهنة على هذه النظرية مباشرة

## دعوى نظرية

(١٤٢) اذا مد من نقطة خارج محيط دائرة قاطع لها ومماس فان المماس يكون وسطا متناسبا

بين القطع بتمامه وجزئه الخارج (شكل ١٣٥) أعني ان  $\frac{و}{د} = \frac{و}{أ}$



والبرهنة على ذلك نصل المستقيمين  $ا ح$  و  $ح ب$  فالتثلثان  
الحادثان  $و ح ب$  و  $و ح ا$  فيهما زاوية مشتركة  
وزاوية  $ب =$  زاوية  $و ح ا$  لاتحادهما في المعيار  
 $ا ح$  فيكونان متشابهين ويحدث

$$\frac{و ح}{و ا} = \frac{و ح}{و ب} \text{ ومنه } و ح = و ب \times و ا$$

وهو المراد

- \* نتيجة - ينتج مما ذكر ان مربع المماس يدل على مقدار قوة نقطة  $و$  وهو  $(د - ب)$
- \* ومع ذلك فانه يسهل معرفة ذلك مباشرة اذ لوحظ ان الابعاد  $د$  و  $ب$  و  $و ح$  يتركب منها
- \* مثلث قائم الزاوية في  $و$  ووتره  $د$
- \* ويمكن تلخيص جميع ما ذكر بخصوص قوة أى نقطة بالنسبة لدايرة فيقال
- \* ان المقدار  $د - ب$  يمكن جعله قانونا عاما لبيان قوة أى نقطة مهما كان وضعها وذلك لانه
- \* اذا جعل  $ح$  رمز هذا القانون يحدث  $ح = د - ب$
- \* فكل نقطة مفروضة خارج الدائرة يكون فيها  $د > ب$  ويكون حينئذ  $ح > 0$  أى موجبا
- \* وكل نقطة مفروضة على محيط الدائرة يكون فيها  $د = ب$  ويكون حينئذ  $ح = 0$
- \* وكل نقطة مفروضة داخل الدائرة يكون فيها  $د < ب$  ويكون حينئذ  $ح < 0$  أى سالبا

## الفصل الخامس

في نظريات مهمة تتعلق بالثلثات وبالشكال الرباعية  
التي يمكن رسمها داخل الدائرة

### دعوى نظرية

- \* (١٤٣) اذا نصفت احدى زوايا مثلث أو المكمل لهما مستقيم فان مستطيل الضلعين
- \* المحيطين بهما يساوى في الحالة الاولى مستطيل قسمة القاعدة مزايدها مربع المستقيم المنصف
- \* وفي الثانية مستطيل بعدى نقطة تقابل المستقيم المنصف بامتداد القاعدة عن نهايتها ناقصا
- \* مربع المستقيم المنصف (شكل ١٣٦)

\* لیکن اء منصفالزاویہ باء , اء منصفالزاویہ باء فیکون

\* في الحالة الاولى  $ab \times a = a \times a + a \times b$

\* وفي الحالة الثانية  $ab \times ac = ad \times bc$  — أَدَّ

\* والبرهنة على ذلك يرسم محيط دائرة على المثلث ثم يمتد

\* المستقيم النصف أ د على استقامته حتى يقابل المحيط

\* في نقطة ح وسط القوس ح ح ب ويمتد أيضا المستقيم

\* المنصف أدّ على استقامته جهة أ حتى يقابل

\* المحيط في نقطة ح وسط القوس ح أ ح ب ويوصل

\* المستقيمان ع ب و ع ب ثم يقال

\* أولاً - ان المثلثين  $أ ب د$  ,  $أ ب ح$  فيهما زاوية  $أ د =$  زاوية  $ح أ ب$  بالتصنيف

\* وزاوية  $\alpha = \angle$  زاوية  $\angle$  لانهما من سومتان في قطعة واحدة واذن تكون الزاوية

\*  $\angle \alpha = \angle \beta$  الزاوية أ ب ح ويكون المثلثان متشابهين ويحدث

$$z^s \times s! + \overline{s!} = (z^s + s!)s! = z! \times s! = s! \times z! \text{ أو } \frac{s!}{s!} = \frac{z!}{z!} *$$

\* غرآن  $ا د \times ح = ح \times د$  (۱۴۰) فیکون  $ا د \times ح = ح \times د + ا د$

\* ثانياً - ان المثلثين  $\Delta د ح و$  ,  $\Delta ب ح هـ$  فهما زاوية  $\Delta د ح و =$  زاوية  $\Delta ب ح هـ = ع ا ب$

\* وكذا زاوية د ح أ = زاوية ب ع أ لانهما مكملتان للزاويتين المتساويتين أ ح ب و ح

\* وحينئذ يكونان متشابهين ويحدث

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v}) = (\dot{\vec{r}} \times \vec{v}) + (\vec{r} \times \dot{\vec{v}}) = \vec{0} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{a} = \vec{0} \times \vec{v} + \vec{r} \times (-\frac{GM}{r^3}\vec{r}) = \vec{0}$$

\* غبران اذ  $\times$  ز  $\times$  د  $\times$  ب (١٤١) فكون اذ  $\times$  ا ب  $\times$  د  $\times$  و ب - ا د

• وهو المراد

\* تنبيه - تم وصل هذه النظرة إلى معرقة مقدار أطوال المستقيمات المتصفلة واما المثلث

\* إذا علمت أضلاعه حيث أنه سهل حساب مقدار أطوال أجزائه القاعدة  $AB$  و  $AC$  أو

\* ذَبْ وَ ذَحْ اذا غلبت الاضلاع الثلاثة

## دعوى نظرية

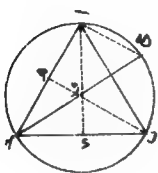
\* (١٤٤) مستطيل أى ضلعين من أى مثلث يساوى المستطيل المتكون من ارتفاع المثلث

\* المقابل للضلع الثالث ومن قطر الدائرة المرسومة عليه (شكل ١٣٧)

\* ليكن  $AB$  المثلث العلوى و  $AD$  العمود المقابل للضلع الثالث  $BC$  و  $CE$  قطر

\* الدائرة المرسومة على المثلث فيكون  $AB \times AD = AC \times AE$

ش ١٣٧



\* والبرهنة على ذلك فصل المستقيم  $AC$  فالتثلثان

\*  $AOE$  و  $ADB$  لأنهما زاوية فيهما زاوية  $ACB$

\* تساوى زاوية  $ABD$  لاتحادهما في المعيار  $\frac{AB}{AC}$

\* وإذا كانا متشابهين ويحدث

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} \text{ أو } AB \times AD = AC \times AE$$

\* وهو المطلوب

\* نتيجة - إذا ضرب طرفا التساوية الأخيرة في طول الضلع الثالث  $BC$  يحدث

$$AB \times AC \times BC = AC \times AB \times BC$$

\* غير أن الحاصل  $AB \times AC$  يدل على ضعف مساحة المثلث فإذا جعل  $M$  رمز المساحة

\* المثلث و  $m$  رمز النصف قطر الدائرة حدث

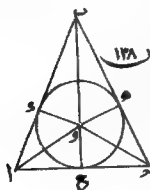
$$AB \times AC \times BC = 4m^2 \times M = 4m^2 \times M$$

\* أعني أن حاصل ضرب أضلاع المثلث الثلاثة مساو لمساواة مضروبة في أربعة أمثال نصف

\* قطر الدائرة المرسومة عليه

\* تنبيه - ويمكن البرهنة على أن مساحة المثلث تساوى حاصل ضرب محيطه مضروباً في

\* نصف نصف قطر الدائرة المرسومة داخله (شكل ١٣٨)



\* وذلك لأن مجموع التثلثات  $BOC$  و  $COA$  و  $AOB$  المتعلق

\* في الارتفاع مساو للمثلث الكلى  $ABC$  وحيث أن مساحة

\* كل واحد منها مساو لحاصل ضرب قاعدته في نصف ارتفاعه

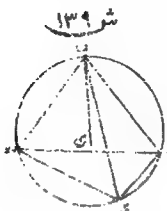
\* فتكون مساحة المثلث الكلى مساوية لحاصل ضرب نصف

\* الارتفاع المشترك أو نصف نصف قطر الدائرة المرسومة داخله في

\* مجموع قواعد التثلثات المتركة بعضها في محيطه ونسبت المطلوب

## دعوى نظرية

- \* (١٤٥) في كل شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة مستطيل قطريه يساوى مجموع المستطيلين المتكون كل واحد منهما من ضلعين متقابلين منه (نظرية بطليموس) (شكل ١٣٩)
- \* والبرهنة على ذلك يرسم المستقيم  $ح ي$  بحيث تكون
- \* زاوية  $ح ب ي =$  زاوية  $أ ب د$  ويتحى يلاقى
- \* المستقيم  $أ د$  فالتلت الحادث  $ح ب ي$  يكون
- \* مشابهاً للمثلث  $أ ب د$  لان فيهما زاوية  $ح ب ي =$
- \* زاوية  $أ ب د$  وعلاوة زاوية  $ب ح أ =$  زاوية  $ب د أ$
- \* لانهما مرسومتان في قطعة واحدة وانن يتركب هذا
- \* التناسب



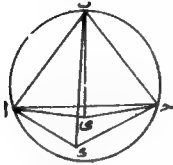
- \*  $\frac{ح ب}{أ ب} = \frac{ب د}{ب ح}$  ومنه  $ب ح \times ب د = أ ب \times ح د$
- \* ثم يقال ان المثلثين  $أ ب ي$  و  $ب د ح$  متشابهان لان فيهما زاوية  $أ ب ي =$  زاوية  $ب د ح$
- \* وذلك لان زاوية  $أ ب د =$  زاوية  $ب د ح$  كما تقدم فاذا ضم لكل واحد منهما الزاوية  $ب د ي$
- \* كان المجموعان  $أ ب ي$  و  $ب د ح$  متساويين وفيهما أيضاً زاوية  $ب أ ي =$  زاوية  $ب د ح$
- \* لكونهما مرسومين في قطعة واحدة وانن يتركب هذا التناسب
- \*  $\frac{أ ب}{ب د} = \frac{أ ي}{ب ح}$  ومنه  $أ ب \times ب ح = أ ي \times ب د$
- \* وبجمع هذه المتساوية على السابقة لها يحدث
- \*  $أ ب \times ب ح + ب د \times ب ح = (أ ي + ب د) \times ب د$
- \* وهو المطلوب

## دعوى نظرية

- \* (١٤٦) في كل شكل رباعي لا يمكن رسمه داخل الدائرة مستطيل قطريه أقل من مجموع مستطيلي اضلاعه المتقابلة (شكل ١٤٠) أعني أن في الشكل الرباعي  $أ ب د ه$  الذي
- \* يترجى الدائرة بثلاثة من رؤس فقط دون الرابعة
- \*  $أ ب \times ب د + ب د \times د ه > أ ب \times أ ه + ب د \times أ د$

\* ولتبرهنه على ذلك نضع زاوية  $أبى =$  زاوية  $دسح$  وزاوية  $بأى =$  زاوية

ش ١٤٠



\*  $دسح$  فالستقيم أى لا يمكن أن يتدمع  $أح$  لان

\* نقطة  $د$  ليست موجودة على المحيط وأن زاوية  $دسح$

\* مغايرة لزاوية  $بأح$  ثم يوصل بعد ذلك المستقيم  $بى$

\* فالثلثان  $أبى$  و  $دسح$  فهما الزوايا المتناظرة

\* متساوية عملا فيكونان متشابهين ويحدث

$$\frac{أب}{دس} = \frac{بى}{أى} \text{ ومنه } أب \times دس = أى \times بى$$

\* وأما الثلثان  $بىح$  و  $أبس$  فان فيهما زاوية

\*  $بسح =$  زاوية  $أبس$  وذلك لان زاوية  $دسح =$  زاوية  $أبى$  عملا فانطرح

\* من كل واحد منهما الزاوية  $بىس$  يكون الباقيان  $دبى$  و  $بأس$  متساويين

\* ولناسبة تشابه الثلثين  $أبى$  و  $دسح$  يحدث

$$\frac{أب}{دس} = \frac{بى}{أى}$$

\* واذن يوجد في الثلثين المذكورين زاوية مشتركة محاطة باضلاع متناسبة فيكونان

\* متشابهين ويحدث

$$\frac{أب}{دس} = \frac{أى}{بى} \text{ ومنه } أب \times دس = أى \times بى$$

\* وبضم هذه المتساوية على السابقة لها يحدث

$$بس(دبى + أب) = أى(بى + أس)$$

\* وحيث كان  $دبى + أب < أى + أس$  يكون  $بس \times دس > أب \times أس$

\* وهو المراد

\* تنبيه - يستنتج من هذه النظرية ان كل شكل رباعي وجد فيه مستطيل قطريه مساو

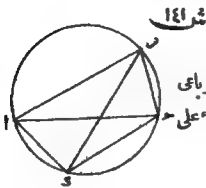
\* لمجموع مستطيلي أضلاعه المتقابلة فانه يمكن رسمه داخل الدائرة والافلا

## دعوى نظرية

\* (١٤٧) فى كل شكل رباعي يمكن رسمه داخل الدائرة تنسبة أحد قطريه الى قطره الثانى كنسبة

\* مستطيل الضلعين المنتهين باحدى طرفي القطر الاول زائد مستطيل الضلعين المنتهين

\* بطرفه الثاني الى مستطيل الضلعين المنتهين بأحد طرفي القطر الثاني زائدا مستطيل الضلعين المنتهين بطرفه الثاني (شكل ١٤١)



$$\text{أعني أن } \frac{ا ب \times ا ب + ا د \times ا ب}{ا ب \times ا د + ا ب \times ا ب} = \frac{ا ب}{ا ب}$$

\* وللبهنة على ذلك يقال انه تطرا لاتقسام الشكل الرباعي

\* ا ب د الى المثلثين ا ب د و ا د ب يحدث بناء على

\* ما تقدم (١٤٤)

$$* ا ب \times ا ب = ا ب \times ا ب \text{ و } ا ب \times ا د = ا د \times ا ب$$

$$* ا د \times ا ب = ا د \times ا ب \text{ و } ا د \times ا د = ا د \times ا د$$

\* وبضمهما الى بعضهما يحدث

$$* ا ب (ا ب + ا د) = ا د (ا د + ا ب) \text{ (١)}$$

\* ونظرا لاتقسام الشكل الرباعي المذكور الى المثلثين ا ب د و ا د ب يحدث أيضا

$$* ا ب \times ا د = ا د \times ا ب \text{ و } ا ب \times ا ب = ا ب \times ا ب$$

$$* ا ب \times ا د = ا د \times ا ب \text{ و } ا ب \times ا ب = ا ب \times ا ب$$

\* وبالجمع يحدث

$$* ا ب (ا ب + ا د) = ا د (ا د + ا ب) \text{ (٢)}$$

\* وبمقارنة المتساوية (١) بالمتساوية (٢) يحدث

$$* ا ب (ا ب + ا د) = ا د (ا د + ا ب) \text{ أو } ا ب \times ا ب + ا ب \times ا د = ا د \times ا د + ا د \times ا ب$$

$$* \text{وهو المراد } \frac{ا ب \times ا ب + ا د \times ا ب}{ا ب \times ا د + ا ب \times ا ب} = \frac{ا ب}{ا ب}$$

## الفصل السادس

في المعادى العليا الاساسية

### دعوى عملية

(١٤٨) المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى أجزاء متساوية (شكل ١٤٢) فإذا أريد تقسيم

المستقيم المعلوم  $AB$  الى خمسة أجزاء متساوية مثلاً يقال

انا لو قد كرنا ما نقرر بالنتيجة الثانية من غرة (١٢١) لعلنا

الحل مباشرة فيؤخذ على مستقيم ما خارج من نقطة  $A$

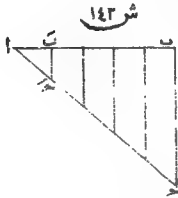
خمس أبعاد مساوية للبعد الاختياري  $AC$  وليكن  $AD$

المستقيم المتحصل من ذلك فيوصل المستقيم  $DB$  ثم يمر

من نقط تقاسيم  $AD$  مستقيمت موازية  $DB$  فينقسم

بذلك المستقيم  $AB$  الى خمسة أقسام متساوية

تبيينه - وكان يمكن استنتاج حل هذه المسئلة من نظرية غرة (١٣٠)



### دعوى عملية

(١٤٩) المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى أجزاء مناسبة لخطوط معلومة (شكل ١٤٣)

فإذا أريد تقسيم المستقيم  $AB$  الى ثلاثة أجزاء مناسبة

لثلاثة خطوط مستقيمة معلومة  $AM$  و  $MD$  و  $DB$

فانه يمد من نقطة  $A$  مستقيم  $AC$  كما اتفق  $AD$  وتؤخذ

عليه المستقيمت الثلاثة المعلومة أحدها بجانب الآخر

ثم توصل نهاية المستقيم الحاصل من ذلك وهي  $C$  بنقطة

$B$  ويرسم من نقطتي  $M$  و  $D$  مستقيمان موازيان  $CB$

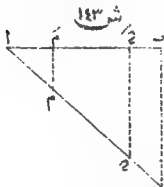
فينقسم بذلك المستقيم  $AB$  الى أجزاء مناسبة للمستقيمت المعلومة (١٢١)

تبيينه ١ - ومع ذلك فانه كان يمكن استنتاج حل هذه المسئلة من نظرية غرة (١٣٠)

تبيينه ٢ - اذا أريد تعيين نقطتين على المستقيم الواصلين  $A$  و  $B$  بحيث يكون

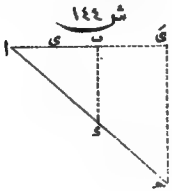
البعدان الواصلان من كل واحد منهما الى النقطتين  $A$  و  $B$  مناسبين مستقيمين معلومين

$M$  و  $D$  يقال (شكل ١٤٤)





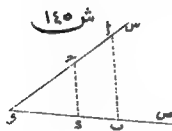
أما تعيين نقطة بين  $أ$  و  $ب$  موفية للشرط المطلوب فهذا يمكن إجراؤه كما ذكر في هذه النظرية وأما إذا أردت تعيين نقطة على امتداد المستقيم  $أب$  موفية لهذا الشرط فإن هذا يقتضى أن يؤخذ البعد  $أب$  مساويا  $م$  مثلا ثم يؤخذ البعد  $دس$  مساويا  $د$  ثم يوصل  $دب$  ويرسم من نقطة  $د$  المستقيم  $دح$  موازيا لـ  $دب$  فتكون  $ح$  هي النقطة المطلوبة لانه يحدث



$$\frac{دب}{دح} = \frac{دب}{دح} \text{ وهو المراد}$$

## دعوى عملية

(١٥٠) المطلوب إيجاد الرابع المناسب لثلاثة خطوط معلومة (شكل ١٤٥)



إذا كانت الخطوط الثلاثة المعلومة هي  $أ$  و  $ب$  و  $د$  فإن ما نقرر في النتيجة الثانية من (عمر ١٢١) كاف لمعرفة طريقة حل هذه المسئلة فترسم زاوية كيفما اتفق من  $د$  و  $ص$  ويؤخذ في جهتي نقطة  $و$  بعدان مساويان للطولين المركبين للنسبة الأولى وهما  $أد = ب د$  ثم يوصل المستقيم  $أب$  ويؤخذ على الضلع  $دص$  البعد

$د$  مساويا للطول الثالث المعلوم  $د$  فإذا رسم  $دح$  موازيا لـ  $أب$  فإن البعد  $دح$  يكون هو الرابع المناسب المطلوب لانه يحدث  $\frac{دب}{دح} = \frac{دب}{دح}$

ومع ذلك فإنه كان يمكن حل هذه المسئلة بواسطة ما تقرر في عمر ١٣٠ وعلى العموم جميع النظريات التي يوجد بها أربعة خطوط متناسبة أو التي يكون فيها مستطيل خطين مساويا لمستطيل خطين آخرين يمكن استعمالها لحل مسئلة إيجاد الرابع المناسب

نتيجة - ليكن المطلوب إيجاد طول المستقيم  $س$  بحيث يكون  $س = \frac{دب}{أ}$  وبعبارة أخرى المطلوب إيجاد ارتفاع مستطيل قاعدته  $أ$  يكون مكافئا لمستطيل آخر بعدا م معلومان  $ب$  و  $د$  فإن المسئلة تولد الى إيجاد الرابع المناسب للخطوط الثلاثة (يجب ترتيب الخطوط)  $أ$  و  $ب$  و  $د$  لانه يحصل هذا النسب

$$\frac{دب}{أ} = س \text{ ومنه } \frac{دب}{س} = أ$$

تنبيه - اذا كان  $ب = ح$  فان الخط  $س$  يسمى بالثالث المتناسب بين الخطين  $ا$  و  $ب$  ويكون  $س = \frac{ب}{١}$

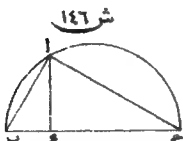
## دعوى عليه

(١٥١) طريقة ايجاد الوسط المتناسب بين مستقيمين معلومين  
اذا كان المستقيمان المعلومان هما  $ا$  و  $ب$  والوسط المتناسب هو  $س$  لزم أن يكون

$$\frac{س}{ب} = \frac{ب}{ا} \text{ أو } س^2 = ب \times ا$$

ولحل هذه المسئلة يقال

أولاً - ان خاصية العمود النازل من رأس المثلث القائم الزاوية على وتره يتوصل بها الى حل هذه



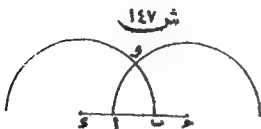
المسئلة ولذلك يرسم المستقيم  $ب$  (شكل ١٤٦)  
مساوياً لمجموع الخطين المعلومين احدهما من  $ب$  الى  $د$   
والثاني من  $د$  الى  $ح$  ثم يرسم على المستقيم  $ب$  نصف  
دائرة ويقام من نقطة  $د$  العمود  $د$  فيكون هو مقدار  
من المطلوب

ثانياً - من المعلوم ان أى ضلع من ضلعي القائمة من

المثلث القائم الزاوية وسط متناسب بين الوتر بقلمه وبين مسقط الضلع المذكور عليه وحينئذ  
فيمكن أن يستخرج من هذه الخاصية حل للمسئلة أنسب من الحل السابق فيما اذا كان  $ا$  و  $ب$   
كبيرين

ثالثاً - من المعلوم ان تمام الدائرة وسط متناسب بين قاطعها بقلمه وجزءه الخارج وحينئذ  
فيمكن بواسطة هذه النظرية حل المسئلة التي نحن بصدها

رابعاً - اذا كان  $ا = ب$  (شكل ١٤٧) وكان  $ا = ح = ب$  فانه يجعل النقطتان



$د$  و  $ح$  مركزين ويرسم محيطاً دائريين بنصف  
قطر واحد مساو  $ا$  فيقطع المحيطان في نقطة  $و$   
ويكون أحد البعدين  $وب$  أو  $وا$  هو الوسط  
المتناسب المطلوب

وذلك لانه يحدث ان

$$وب = ا^2 - ا^2 = (ا - ا)(ا + ا) = ٠ \times ا = ٠$$

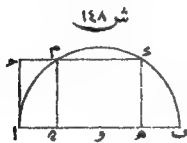
وهي طريقة بسيطة لا تحتاج إلا استعمال البرجل فقط بعد رسم المستقيم  $\delta$   
 نتيجة ١ - يؤخذ من المقدار  $\Gamma = \alpha \times \beta$  ان طريقة إيجاد الوسط المناسب الهندسي  
 يتوصل بها الى حل المسئلة الآتية وهي  
 طريقة انشاء مربع بكافئ الما مستطيلاً أو متوازي أضلاع أو مثلثاً أو شبه منحرف معلوماً  
 نتيجة ٢ - ويعلم من طريقة إيجاد الوسط المناسب الهندسي أن الوسط المناسب الهندسي  
 $\alpha \times \beta$  بين العددين  $\alpha$  و  $\beta$  هو أقل من الوسط المناسب العددي  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  بين العددين  
 المذكورين

### دعوى عليه

(١٥٢) المطلوب رسم مستطيل بكافئ مربع معلوما بحيث يكون مجموع ضلعي المستطيل  
 المتجاورين معلوماً (شكل ١٤٨)

من المعلوم انه اذا أنزل من رأس المثلث القائم الزاوية عمود على وتره فان هذا العمود يقسم الوتر  
 الى جزأين يكون مستطيلهما مساوياً لمربع العمود

وحيث أنه يؤخذ مستقيم مساوياً لمجموع البعدين المعلوم  
 طوله ويرسم عليه نصف محيط دائرة ثم يقام من نقطة  $\alpha$   
 العمود  $\alpha \delta$  على القطر ويؤخذ عليه البعد  $\alpha \delta$  مساوياً  
 اضلع المربع المعلوم ويمثل نقطة  $\delta$  المستقيم  $\delta \Gamma$   
 موازياً  $\alpha \beta$  فاذا أنزل من نقطة  $\Gamma$  العمود  $\Gamma \delta$  على



$\alpha \beta$  المستقيمان  $\alpha \delta$  و  $\delta \beta$  يكونان هما بعدي المستطيل المطلوب

\* نتيجة - اذا اردنا إيجاد جذري المعادلة  $\Gamma^2 - \alpha \Gamma + \beta = 0$  فكأنه يجب البحث  
 عن الخطين  $\Gamma$  و  $\beta$  بحيث يكون

$$\Gamma + \beta = \alpha \quad \text{و} \quad \Gamma \beta = \beta$$

\* وحيث أنه يؤخذ الامر الى المسئلة المتقدمة

\* وأما جذرا المعادلة  $\Gamma^2 + \alpha \Gamma + \beta = 0$  فهما مساويان في المقدار المطلق لجذري

المعادلة السابقة ولذا يبحث عنهما بعين الطريقة السابقة

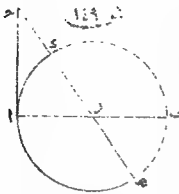
\* تنبيه - يجب ان تكون المسئلة ممكنة ان لا يتجاوز البعد  $\alpha \delta$  نصف القطر أو أعني ان

\* لا يتجاوز ضلع المربع المعلوم نصف المستقيم  $\alpha \beta$

- \* وحيث قد يكون أكبر المستطيلات الممكنة التي يكون مجموع ضلعها المتجاورين مساويا للمستقيم المعطى أب هو المربع المرسوم على نصف المستقيم المذكور

## دعوى عملية

(١٥٣) المطلوب رسم مستطيل يكافئ مربعا معلوما بحيث يكون الفرق بين ضلعي المستطيل المتجاورين معلوما (شكل ١٤٩)



حل هذه المسألة يقال اتلوا نذكرنا ان مماس محيط الدائرة وسط متناسب بين قاطعها بتمامه وبين جزئه الخارج أعني ان المستطيل الذي بعده القاطع بتمامه وجزؤه الخارج يكافئ المربع المنشأ على المماس وان الفرق بين القاطع بتمامه وبين جزئه الخارج هو قطر الدائرة تظهر لنا طريقة حل هذه المسألة التي نحن بصدها بواسطة ان يرسم على المستقيم المعطى أب دائرة اعتبارها قطرا

لها ويقام من نقطة أ العمود أح على هذا القطر ويؤخذ منه البعد أح مساويا لضلع المربع المعطى ثم يوصل القاطع ح د مارا بالمركز فيكون بعد المستطيل المطلوب هما ح د و د د

\* نتيجة - اذا اريد ايجاد جذري احدي المعادلتين

$$* \quad x^2 - Ax = B \quad \text{و} \quad x^2 + Ax = B \quad \text{و} \quad x^2 = B$$

\* وجعل س و س رمزين للمقدارين المطلقين لهذين الجذرين وفرض أن س هو

\* الجذر الاكبر فكأنه يجب ايجاد الخطيين اللذين يكونان بحيث ان س - س = أ و

\* س - س = ب وحيث قد يرجع الامر الى المسئلة المتقدمة

## دعوى عملية

(١٥٤) المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى خمسة ذات وسط وطرفين (شكل ١٥٠)

أعني اذا علم مستقيم مثل أب وكان المطلوب ايجاد نقطة عليه بحيث يكون بعده عن نقطة ب

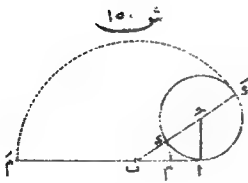
وسطا متناسبا بين المستقيم الكلي أب وبين بعده عن نقطة أ يقال نفرض ان المسئلة

محولة وأن م هي النقطة المطلوبة فيحدث على مقتضى المنطوق ان

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{AB} \quad \text{او} \quad \frac{AB}{AM} = \frac{AM}{AB}$$

ثم اذا تصورنا تقدير كل الخطوط باعداد يحدث  

$$م ب = (ا ب + م ب)$$



وحينئذ يتوصل الى المقدار م ب بواسطة  
 انشاء مستطيل يكافئ المربع ا ب بحيث  
 يكون الفرق بين ضلعي المستطيل مساويا ا ب  
 وأن أصغر البعدين يدل على م ب وبناء على

ما ذكر اذا رجعنا الى العملية السابقة أمكن استنتاج طريقة العمل الآتية وهي  
 يقام من نقطة ا نهاية المستقيم ا ب عمود مساو لنصف ا ب ثم يرسم محيط دائرة نصف القطر  
 ا ح ويوصل نقطة ب بالمرکز فالحزء الخارج ب د من القاطع يدل على الجزء الأكبر من المستقيم  
 ا ب المنقسم الى قسمين ذات وسط وطرفين

\* نتيجة ١ - يمكن تمهيم منظوق المسئلة التي نحن بصدد حلها فيقال  
 \* المطلوب تعيين النقط الموجودة على المستقيم ا ب أو على امتداده الموفية لهذا الشرط وهو  
 \* أن البعد الواصل من أيها الى نقطة ب يكون وسطا متناسبا بين البعد ا ب وبين بعدها  
 \* عن نقطة ا غير أنه يسهل مشاهدة أنه لا يوجد من هذه النقط الاثنان فقط  
 \* وذلك لانه

\* أولا - اذا انتقلت نقطة م متحركة من نقطة ب الى نقطة ا فان النسبة  $\frac{ا ب}{م ب}$  تبدئ  
 \* من اللانهاية وتنتهي بالوحدة

\* وأما النسبة  $\frac{م ب}{ا ب}$  فانها تبدئ بالصفر وتنتهي باللانهاية له وحيث ان الكسر الاول كان أولا  
 \* أكبر من الكسر الثاني ثم صار أصغر منه فينتج من ذلك لزوم وجود نقطة مثل م بين ا و ب  
 \* تكون فيها هاتان النسبتان متساويتين وهذه هي النقطة التي سبق التكلم عليها

\* ثانيا - اذا انتقلت نقطة م متحركة على امتداد ا ب جهة ب فان النسبة  $\frac{ا ب}{م ب}$   
 \* تبدئ أولا باللانهاية وتنتهي بالصفر وأما النسبة  $\frac{م ب}{ا ب}$  فانها تبدئ بالصفر وتنتهي  
 \* بالوحدة (لان البسيط والمقام بصيران لانهمايين) وحيث ان الكسر الاول كان أولا أكبر  
 \* من الثاني ثم صار أصغر منه فيدل ذلك على لزوم وجود نقطة على امتداد ا ب وعلى شمال  
 \* نقطة ب تكون فيها النسبتان المذكورتان متساويتين بحيث يكون

\* 
$$\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{م ب}{م ب} \text{ أو } \frac{ا ب}{ا ب} = \frac{م ب}{م ب} \text{ أو } \frac{ا ب}{ا ب} = \frac{م ب}{م ب}$$

\* ومن ذلك يشاهد أن هذه النقطة تتعين أيضا بواسطة رسم مستطيل يكافئ المربع  $أ ب$   
 \* ويكون الفرق بين ضلعيه المتجاورين مساويا  $أ ب$  غير أن البعد الاكبر هنا هو  $م ب$   
 \* وجئنا بذلك للوصول الى هذا الحل الثاني أن يؤخذ القاطع ب ق على امتداد  
 \* المستقيم  $أ ب$

\* ثالثا - اذا انتقلت نقطة  $م$  متحركة على امتداد المستقيم  $ب أ$  جهة  $أ$  فان النسبة  $\frac{أ ب}{م ب}$   
 \* تتبدى أولا بالوحدة ثم تنتهي بالصفر وأما النسبة الثانية فانها تتبدى بالانهاية وتنتهي  
 \* بالوحدة وحيث ان النسبة الاولى هي دائما أصغر من الثانية فهذا يدل على أنه لا يمكن وجود  
 \* نقط على شمال نقطة  $أ$  من امتداد المستقيم  $أ ب$  تكون فيها النسبتان متساويتين

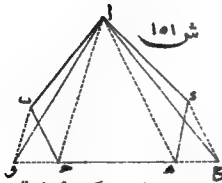
نتيجة ٢ - ويسهل تعيين مقدارى  $م ب$  و  $م أ$  بدالة المستقيم المعلوم  $أ ب$  المرموز له  
 بالحرف  $أ$  لانه يحدث على مقتضى ما تقر بهقرة (١٣١) أن

$$\text{أولا } م ب = م أ = م د = م ح = م ز \quad م ب = م أ = م د = م ح = م ز \quad م ب = م أ = م د = م ح = م ز$$

$$\text{ثانيا } م ب = م أ = م د = م ح = م ز \quad م ب = م أ = م د = م ح = م ز \quad م ب = م أ = م د = م ح = م ز$$

### دعوى عملية

(١٥٥) المطلوب رسم مثلث يكافئ كثيرا أضلاع معلوما (شكل ١٥١)



الحل هذه المسئلة يكفى أن نبين كيف يمكن تحويل  
 أى شكل كثيرا الاضلاع الى آخر يكافئه يكون

عدد رؤسه أقل بواحد من عدد رؤس الاول

ليكن  $أ ب ح$  شكلا كثيرا الاضلاع فنصل

أحداً قطاره  $أ د$  ثم نرسم من الرأس  $ب$  المستقيم

$ب و$  موازيا لهذا القطر ويمد حتى يتقابل مع

امتداد الضلع  $ح د$  في نقطة  $و$  ثم يوصل  $أ و$  فالثلث الحاد  $أ د و$  يكون مكافئا للثلث

$أ ب ح$  لاتحادهما في القاعدة والارتفاع وجئنا اذا استعوضنا الثلث  $أ ب ح$  بالمثلث  $أ د و$

فيكون الشكل الرباعي  $أ د ح و$  مكافئا للشكل الخماسى المقروض

نتيجة ١ - يمكن تحويل أى شكل كثيرا الاضلاع الى مربع يكافئه وذلك لانه بعد أن يقول

الشكل المقروض الى مثلث يكافئه فانه يستخرج الوسط المتناسب بين قاعدة المثلث الحاد

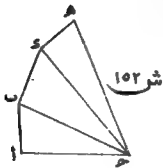
وبين نصف ارتفاعه فيكون هو ضلع المربع المطلوب

نتيجة ٢ - وكذا يمكن تحويل أى شكل كثير الاضلاع الى مستطيل يكافئ معلوم القاعدة  
لانه بعد تحويل الشكل الى مثلث يكافئه يوضع  $ل = س = \frac{ب \times ع}{٢}$   
فترض أن ل تدل على قاعدة المستطيل المعلومة و ب على قاعدة المثلث و ع على  
ارتفاعه و س على ارتفاع المستطيل المطلوب وحينئذ يكون س عبارة عن الرابع  
المتناسب بين الخطوط الثلاثة ل و ب و  $\frac{ع}{٢}$

## دعوى عليه

(١٥٦) المطلوب انشاء مربع يكافئ مجموع مربعين أو مربعات معلومة (شكل ١٥٢)

يرمز بالحروف أ و ب و ج و د ... الخ لاضلاع المربعات  
المعلومة وبالحرف س لاضلع المربع المطلوب وحينئذ يجب أن  
يرسم المستقيم



$$س = \sqrt{أ^٢ + ب^٢ + ج^٢ + د^٢ + \dots}$$

فيرسم مستقيم ا د = أ ويقام من نهاية ا عمود عليه ويؤخذ  
أ ب = ب فيحدث

$$ب د = أ + ب \text{ أو } ب د = \sqrt{أ^٢ + ب^٢}$$

ثم يقام نقطة ب عمود على د ويؤخذ منه ب د = د ويوصل د د فيحدث

$$د د = ب د + د د = د^٢ + ب^٢ + د^٢ = د^٢ + ب^٢ + د^٢ \text{ أو } د د = \sqrt{د^٢ + ب^٢ + د^٢}$$

ثم يقام نقطة د عمود على د د ويؤخذ منه د د = د د ويوصل د د فيحدث

$$د د = د د + د د = د^٢ + د^٢ + د^٢ + ب^٢ = د^٢ + د^٢ + د^٢ + ب^٢ \text{ وهكذا}$$

نتيجة - يستنتج من هذه العملية كيف يمكن رسم المقادير ٢٧١ و ٣٧١ و ٥٧١  
وطريقة ذلك أن يرسم الشكل ١٥٢ ويؤخذ فيه أ = ب = د = د

نتيجه - يتوصل بواسطة نظرية ثمة ١١٥ الى طريقة رسم مربع يكافئ الفاضل بين  
مربعين معلومين





$$\frac{\overline{ب\Gamma}}{\overline{ب\Delta}} = \frac{\overline{أ\Gamma}}{\overline{أ\Delta}} = \frac{\overline{ب\Gamma}}{\overline{ب\Delta}}$$

فإذا كان ط ح مساوياً بالطول المعلوم م يكون ب ط هو المستقيم المطلوب والا فيؤخذ ح د م ويرسم من نقطة د مستقيم وازى أ ح فيقابل هو أ وامتداده المودى نقطة مثل هـ ينتمى المستقيم و ح موازياً ب ح ويحدث

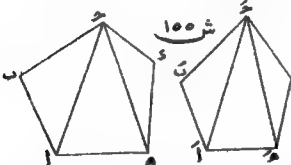
$$\frac{\overline{ب\Gamma}}{\overline{ب\Delta}} = \frac{\overline{ب\Gamma}}{\overline{ب\Delta}} = \frac{\overline{ب\Gamma}}{\overline{ب\Delta}}$$

ويكون ح هـ هو المستقيم المطلوب

نتيجة - يمكن دائماً إيجاد خطين تكون النسبة بينهما كالنسبة بين أى شكلين معلومين وذلك بأن يحول أولاهما إلى واحد من الشكلين المعلومين إلى مربع يكافئه ثم يفرض لأحد الخطين المطلوبين طول اختيارى ويبحث عن الثانى كما مر فى الدعوى المتقدمة

## دعوى عملية

(١٥٩) المطلوب رسم شكل يشابه آخر معلوماً على مستقيم معلوم (شكل ١٥٥)



فإذا كان المستقيم المعلوم أ ب مناظراً للضلع أ ب من الشكل المعلوم أ ب ح و د ك رنا ما تقر فى نظريات الأشكال المتشابهة سهل علينا الوصول إلى حل هذه المسئلة فبوصول أ قطار

الشكل المعلوم ثم يتدأ بإنشاء مثلث على الضلع أ ب يشابه المثلث أ ب ح بأن ترسم زاوية ب أ ح = ب أ د و زاوية أ ب ح = أ ب د ثم ترسم بعد ذلك على الضلع أ د نظير الضلع أ ح مثلث يشابه المثلث أ ب ح كما مر ويستمر العمل حتى ينتهى تشكيل الشكل أ ب د هـ الذى يتركب ان من مثلثات متشابهة لثلاث الشكلى المعلوم ومتعددة معها فى العدد ومماثلة لها فى الوضع

## دعوى عمليه

(١٦٠) المطلوب رسم شكل يشابه شكلين معاوين متشابهين ويساوى مجموعهما أو التفاضل بينهما

إذا كان الشكلان المعاويمان هما  $ع$  و  $ك$  وضلعاهما المتناظران هما  $ا$  و  $ب$  ورمز الشكل المطلوب بالحرف  $ص$  وضلعه المناظر للضلعين المعاويمين بالحرف  $س$  وفرض أن المسئلة محلولة فنحن حيث أن الشكلين  $ع$  و  $ك$  متشابهان يحدث

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ع}{ك} \quad \text{أو} \quad \frac{ا}{ب} = \frac{ع}{ك + ع}$$

وحيث أن الشكل المطلوب  $ص$  يجب أن يكون مشابها لكل واحد من الشكلين المعاويمين لزم أن يكون

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ع}{ص}$$

فإذا قارنا هذا التناسب السابق ولا حظنا أن  $ص$  يجب أن يكون مساويا  $ع + ك$  لزم أن يكون  $ص = ع + ك$  أي يكون  $س$  ورمز الثالث قائم الزاوية ضلعا قائمته  $ا$  و  $ب$  وإذا لاحظنا أن  $ص$  يجب أن يكون مساويا  $ع - ك$  لزم أن يكون  $ص = ع - ك$  أي أن  $س$  يكون أحد ضلعي مثلث قائم الزاوية وتره  $ا$  وضلعه الثالث  $ب$  وحينئذ فقد رجع الأمر إلى المسئلة تمر (١٥٦)

## دعوى عمليه

(١٦١) المطلوب رسم شكل يشابه شكلا آخر معاويا وتكون نسبته إليه كنسبة خطين معاوين

إذا كان  $ع$  رمز الشكل المعلوم و  $ا$  رمز الاحد أضلاعه و  $ص$  رمز الشكل المطلوب و  $ي$  رمز الاحد أضلاعه المناظر للضلع  $ا$  فإنه يحدث على مقتضى المنطوق أن

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ع}{ص}$$

وحيث أن الشكلين يجب أن يكونا متشابهين يحدث أيضا

$$\frac{ا}{ب} = \frac{ع}{ص}$$

ومن هذين الناسيتين يحدث

$$\frac{r}{\varnothing} = \frac{r}{\eta}$$

وحينئذ فقد رجع الامر الى نظرية نمرة (١٥٧)

### دعوى علمية

(١٦٢) المطلوب رسم شكل يشابه آخر معلوما  $\epsilon$  وبكافئ شكلا معلوما أيضا  $\zeta$   
 بفرض أن  $\sigma$  هو ضلع الشكل  $\sigma$  المجهول المناظر للضلع  $\alpha$  من الشكل المعلوم  $\epsilon$   
 ونفرض أن  $\mu$  و  $\varnothing$  ضلعا المربعين المكافئين بالناسير للشكلين  $\epsilon$  و  $\zeta$  فيحدث

$$\frac{\mu}{\epsilon} = \frac{\mu}{\eta}$$

وكذا يحدث أيضا أن

$$\frac{r}{\varnothing} = \frac{r}{\eta}$$

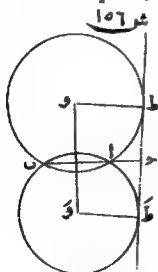
وبأخذ جذر حد وهذا التناسب بفرض أن تلك الخطوط مقدرة بأعداد يحدث

$$\frac{r}{\varnothing} = \frac{r}{\eta}$$

واذن يكون  $\sigma$  رابعا متناسبا بين الخطوط الثلاثة  $\alpha$  و  $\mu$  و  $\varnothing$

### دعوى علمية

(١٦٣) المطلوب رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين  $\alpha$  و  $\beta$  وتمس مستقيما معلوما  $\epsilon$  ط  
 (شكل ١٥٦)



نفرض أن المسئلة محولة وأن  $\sigma$  هي مركز الدائرة المطلوبة فإذا  
 مد المستقيم  $\alpha\beta$  حتى يقابل المستقيم المعلوم في نقطة  $\epsilon$  فن  
 حيث أن  $\epsilon$  ط يجب أن يكون مماسا لمحيط الدائرة يحدث  
 $\epsilon$  ط =  $\epsilon$  ط  $\times$  واذن يكون  $\epsilon$  ط وسطا متناسبا بين  
 $\epsilon$  و  $\alpha$  و  $\beta$  فإذا جئنا عن مقدار  $\sigma$  أخذنا في جهة نقطة  $\epsilon$   
 بعد أن مساويان لطول هذا الوسط المناسب فانه يتوصل الى  
 حلين للمسئلة

وأما اذا وقع النقطتان  $\alpha$  و  $\beta$  في جهة المستقيم المعلوم تكون المسئلة غير ممكنة للحل



الدائرة التي تمر بالنقط الثلاث المعلومة ب و ا و ح فانها تعين النقطة الرابعة بتقاطع هذه الدائرة بالدائرة المعلومة وبذلك تعلم طريقة الحل

وهي أن تؤخذ نقطة اختيارية ح على الدائرة المعلومة ويرد بها بالنقطتين المعلومتين محيط دائرة فيقطع الدائرة المعلومة في نقطة د فاذا وصل ح د ومد على استقامته ثم مد ا ب أيضا حتى يتلاقيا في نقطة ط ورسم المماس ط م كانت نقطة م هي نقطة تماس الدائرة المطلوبة بالدائرة المعلومة وأما مركزها فيوجد في تقاطع العمود المقام على وسط الوتر ا ب مع العمود م ه المقام على المماس

لكنه حيث كان يمكن مدهماس آخر للدائرة ط م فيكون للمسئلة حلان وتكون نقطة ه مركز الدائرة الثانية الموفية للشرط المعلومة

وبمثل ذلك يجري العمل لو كان النقطتان داخل الدائرة وأما اذا كانت احدى النقطتين داخل الدائرة المعلومة والثانية خارجها تكون المسئلة غير ممكنة

## دعوى عملية

(١٦٦) المطلوب إيجاد المحل الهندسي للنقط التي تكون بحيث ان مجموع مربعي البعدين الاصيلين من أ بها الى نقطتين معلومتين ثابتين معلوم وثابت دائما (شكل ١٥٩)

ليكن ب و ح النقطتين المعلومتين الثابتين و م المربع الثابت المعلوم فاذا كانت ا احدى نقط السطح تحصل على مقتضى المنطوق أن

$$AB^2 + AC^2 = AM^2$$

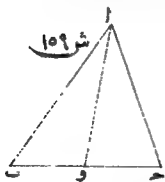
لكن

$$AB^2 + AC^2 = AB^2 + 2 \cdot BO \cdot AO + AO^2$$

بفرض أن نقطة و هي وسط المستقيم ح ب وحينئذ يكون

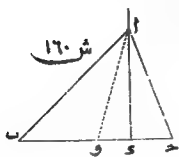
$$2 \cdot AO + BO^2 = OM^2 \text{ أو } AO^2 = \frac{OM^2 - BO^2}{2} = \frac{OM^2 - BO^2}{4} - BO^2$$

وحيث كان م ثابتا و ب نصف ح ثابتا أيضا فيكون مقدار أ ثابتا أعني أن بعد نقطة ا عن نقطة و ثابت دائما واذن فيكون المحل محيط دائرة نصف قطره الضلع الثالث من مثلث قائم الزاوية يرسواي  $\frac{1}{2} OM$  وضلعه الآخر ب و



## دعوى علميه

المطلوب إيجاد المحل الهندسى للنقط التى تكون بحيث أن الفرق بين مربعى البعدين الواصلين من أهما إلى نقطتين معلومتين ثابتين معلوماً وثابت دائماً (شكل ١٦٠) .



لكن أحدى نقطى المحل و و د مسقط الخط المتوسط للمثلث  
أ ب ح على ح و وليكن م' المربع المعلوم فعلى حسب المنطوق

$$أ ب - أ ب' = م'$$

وعلى مقتضى ما تقر فى نظرية نجمة ١١٨ يحدث

$$أ ب - أ ب' = ح ب ح' و$$

وحيث أن يكون

$$ح ب ح' = م' و منه و د = \frac{م'}{ح ب}$$

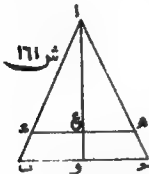
وحيث كان كل من م' و ب ح ثابتاً فيكون مقدار و د كذلك ويكون المحل حينئذ هو  
المستقيم أو العمودى على المستقيم الواصل بين النقطتين المعومتين ويكون بعده عن هذا  
المستقيم هو الثالث المناسب للمقدارين ب ح و م' أو الرابع المناسب بين الخطوط  
ب ح و م' .

## الفصل السابع

### تمارين

- ١ - إذا دل العدان ٧٥ متراً ربعاً و ٢٥ متراً ربعاً على مسطحى مستطيلين متحدى القاعدة وكان ارتفاع أكبرهما ١٥ متراً فكم مقدار ارتفاع الثانى
- ٢ - إذا دل العدان ١٥ متراً و ٥ متر على قاعدتى مستطيلين متحدى الارتفاع وكانت مساحة أصغرهما ٢٥ متراً ربعاً فكم تكون مساحة المستطيل الثانى
- ٣ - إذا دل العدد ١٢٠ متراً ربعاً على مساحة مستطيل قاعدته ٢٠ متراً والمطلوب تعيين ارتفاع المثلث الذى قاعدته أربعة أمثال قاعدة المستطيل ومساحته ثلاثة أمثال مساحته

- ٤ - إذا دل عدد ٢٥ على النسبة الكائنة بين مربعين فله مقدار النسبة بين ضلعيهما
- ٥ - المطلوب تعيين النسبة الكائنة بين مربعين ضلعاها ٣ متر و ٦ متر
- ٦ - إذا كان طول العمود النازل من رأس المثلث القائم الزاوية على وتره مساويا ٤ متر وكان طول أحد ضلعي القائمة مساويا ٥ متر ومسقطه على الوتر مساويا ٣ متر والمطلوب تعيين مقدار طول ضلعهما الثاني ومقدار مسقطه على الوتر
- ٧ - إذا دل عدد ١٨ مترا مربعا على مربع وتر المثلث القائم الزاوية المتساوي الساقين والمطلوب تعيين طول العمود النازل من الرأس على الوتر
- ٨ - إذا دل الأعداد ٥ متر و ٧ متر و ٩ متر على أطوال أضلاع مثلث والمطلوب تعيين أطوال المستقيمتين المتوسطة له
- ٩ - إذا دل العددين ٦ و ٨ على مقاسي ضلعي مثلث ثم وصل بين منتصفيهما باستقيم طوله ٥ متر والمطلوب تعيين مقدار ضلعه الثالث
- ١٠ - إذا دل الأعداد ٢٠ متر و ٢٢ متر و ٣٠ متر على أضلاع مثلث ثم نصفت الزاوية المحصورة بين الضلعين ٢٠ متر و ٢٢ متر باستقيم والمطلوب تعيين مقدار يساهم الضلع الثالث المحددين بالمستقيم المنصف
- ١١ - إذا قطع الضلعان أ ب و أ ح من المثلث أ ب ح بالمستقيم د ه الموازي لقاعدته ب ح والمتباعد عنها بالبعد ع والمطلوب حساب بعد المستقيم القاطع د ه عن الرأس أ إذا كان د ه = ١٨ متر و ب ح = ٢٥ متر و ع = ٢٠,٢٠ متر (شكل ١٦١)
- ١٢ - المطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين منتصفي قطري شبه المخرف يساوي نصف الفرق بين قاعدتيه المتوازيين
- ١٣ - إذا متق دائرة نصف قطرها ١,٢٠ متر وتر طوله متر واحد والمطلوب تعيين بعده عن المركز
- ١٤ - إذا متق دائرة نصف قطرها ٨ متر وتر طوله ٨ متر والمطلوب حساب يساهم قطر الدائرة العمودى على هذا الوتر والمحدد به
- ١٥ - إذا دل العددين ٨ متر و ٣ متر على نصفي قطري دائرتين والعدد ١٥ متر على البعد السكائين بين مركزيهما والمطلوب حساب طول المماس المشترك بينهما في الخارج



- ١٦ - إذا دلت الأعداد ٨ مترو ٩ مترو ١٥ متر على أطوال أضلاع مثلث فأنوع الزاوية المقابلة للضلع الأكبر منه
- ١٧ - إذا دل العددين ٨ مترو ١٠ متر على نصفي قطري دائرتين والعقد ١٢ متر على مقدار البعدين مركزيهما والمطلوب حساب طول الوتر المشترك بينهما
- ١٨ - المعلوم زاوية ونقطة داخلها والمطلوب تعيين مستقيم من هذه النقطة قاطعا الضلع الزاوية بحيث تكون النسبة بين البعدين المحصورين بين هذه النقطة وضلع الزاوية مساوية  $\frac{2}{3}$
- ١٩ - المعلوم مستقيم م والمطلوب تعيين مستقيم آخر بحيث يكون مربعه مساويا  $\frac{3}{5}$  م<sup>٢</sup>
- ٢٠ \* طريقة رسم مربع داخل مثلث معلوم
- ٢١ \* المطلوب تعيين المثلث القائم الزاوية الذي تكون مقادير أضلاعه الثلاثة أعدادا متوالية
- ٢٢ \* إذا كان الفرق بين ضلعي القائمة من المثلث القائم الزاوية مساويا ٧ متر وكان طول وتره مساويا ١٣ متر والمطلوب حساب ضلعي القائمة
- ٢٣ \* المطلوب تعيين أضلاع المثلث القائم الزاوية إذا علم أن طول وتره يزيد عن أحد ضلعي القائمة متر واحد وعن الضلع الثاني عملية أمتار
- ٢٤ \* إذا كان وتر المثلث القائم الزاوية مساويا ٥٥ متر ومجموع الضلعين المحيطين بالقائمة مساويا ٧٧ متر والمطلوب تعيين ضلعي القائمة
- ٢٥ \* إذا كان مجموع الأضلاع الثلاثة للمثلث القائم الزاوية مساويا ٦٠ متر والفرق بين الضلعين المحيطين بالقائمة مساويا ٥ متر والمطلوب تعيين أضلاع المثلث القائم الزاوية الثلاثة
- ٢٦ \* إذا علم القسم الأكبر من قسمي المستقيم المنقسم إلى قسمين وسط وطرفين والمطلوب تعيين طول المستقيم الأصلي





## الباب الثاني

في الاشكال المنتظمة وقياس الدائرة

### تعريف

(١٦٨) الشكل المنتظم هو شكل تساوت أضلاعه وزواياه مقداراً أي زاوية من أي شكل منتظم مرتبط بعدد أضلاعه فإذا كان  $n$  دالاً على عدد أضلاع شكل منتظم كان مجموع الزوايا القائمة الداخلة فيه مساوياً  $2(2 - n) = 2 - 4$  وعليه مقدار كل زاوية يساوي  $\frac{2 - 2n}{2} = 2 - \frac{2n}{2}$

أبسط الاشكال المنتظمة هو المثلث المتساوي الاضلاع ومقدار زاويته هو  $\frac{2}{3}$  قائمة ومما ذكره يتبين أن الشكلين المنتظمين المتحددين في عدد الاضلاع تكون زواياهما متساوية (١٦٩) حيث إن الزوايا متساوية في أي شكلين منتظمين متحددين في عدد الاضلاع وإن النسبة بين أي ضلعين منهما مساوية لضرورة للنسبة الكائنة بين أي ضلعين آخرين فيكونان اذن متشابهين

(١٧٠) يوجد أشكال منتظمة من كل نوع من أنواع الاشكال لا لا ونصورتنا انقسام محيط دائرة الى أجزاء متساوية عددها  $m$  ووصل بين نقط التقاسيم المتوالية بمسقطيات فانه يشكل من ذلك كثير أضلاع منتظم عدده أضلاعه  $n$  وذلك لانه أولاً حيث إن أضلاعه أوتار لاقواس متساوية فتكون متساوية وثانياً حيث إن زواياه مرسومة في قطع متساوية فتكون متساوية أيضاً

\* (١٧١) اذا قسم محيط دائرة الى أقسام متساوية عددها  $m$  ولم نصل بين نقط التقاسيم المتوالية بمسقطيات كما سبق ذكره بل وصل بينها نواتنا وكان  $n$  أولياً مع  $m$  فانا نبرهن على أننا نرجع الى نقطة المبدأ بعد عمليات عددها  $m$

\* ولذلك يقال اذا رمزنا بالحرف  $h$  محيط الدائرة فان مقدار كل قسم من الاقسام المنقسم اليها يكون مساوياً  $\frac{h}{m}$  ومتى وصلت نقط التقاسيم فواتنا فان مقدار كل قوس موزعاً واحد هذه الاوتار يكون مساوياً الى  $\frac{2\pi}{m}$  وحينئذ فلاجل تطبيق وتره هذا القوس على المحيط مراراً ثم العودة الى نقطة المبدأ يجب أن يكون تكرار هذا القوس  $\frac{2\pi}{m}$  عدة مرات عددها  $m$  مساوياً بالعدد صحيح من المحيطات نرسمه بحرف  $l$  وبناء عليه يكون

$$\frac{2\pi}{m} = l \text{ أو } \frac{2\pi}{m} = l \quad (١)$$

\* وحيث ان ل عدد صحيح لزم أن يكون الكسر  $\frac{ل}{م}$  دالاً أيضاً على عدد صحيح ولما كان  
 \*  $\frac{ل}{م}$  أولياً مع م لزم أن يكون  $\frac{ل}{م}$  عدداً صحيحاً وحيث أن  $\frac{ل}{م}$  أقل مقدراً يعطى الى م  
 \* يكون هو م وهو المطلوب

\* الشكل المتكون بهذه الصورة يسمى شكلاً منتظماً نجمياً والبرهنة على تساوى أضلاعه  
 \* وزواياهم غير أننا لاحظ أيضاً أنه يمكن الحصول على عين الشكل المنتظم النجمي المذكور  
 \* سواء وصل بين نقط التقاسيم فنانونا كما ذكر أو وصل بينها (م - د) و (م - هـ)  
 \* وينتج من ذلك أنه يمكن الوصول الى جميع الاشكال المنتظمة الممكنة التي عددها م بواسطة  
 \* البحث عن جميع الاعداد الأولية مع م من ابتداء الواحد الى  $\frac{م}{٢}$

\* فإذا فرض الآن وجود عامل مشترك هـ بين م و د بان كان  $\frac{د}{هـ} = \frac{ل}{هـ}$  و  $\frac{ل}{هـ} = \frac{م}{هـ}$  هـ  
 \* مثلاً فان التساوية (١) السابقة تؤل الى

$$* \quad \frac{د}{هـ} = \frac{ل}{هـ} \quad \text{أو} \quad \frac{د}{م} = \frac{ل}{م} \quad (٢)$$

\* وهذه التساوية الاخيرة تدل على أنه اذا أعطى م مقداراً مساوياً مَ فاننا ترجع الى نقطة  
 \* المبدأ بعد عمليات عددها مَ وبذلك يتوصل الى كثير الاضلاع منتظم عددها مَ  
 \* ولتنطبق ما ذكر على بعض أمثلة فنقول

\* أولاً - اذا قسم المحيط الى خمسة أقسام متساوية ووصل بين نقط التقاسيم المتوالية  
 \* بمستقيمات فاننا نتوصل الى الشكل الخماسي المنتظم المحتب أما اذا وصل بين نقط التقاسيم  
 \* اثنين اثنين فاننا ترجع الى نقطة المبدأ بعد خمس عمليات حيث ان عدد ٥ أولى مع عدد ٥  
 \* وبذلك يتوصل الى الشكل الخماسي المنتظم النجمي

\* ثانياً - اذا قسم محيط الدائرة الى عشرة أقسام متساوية ووصلت نقط التقاسيم المتوالية  
 \* بمستقيمات فاننا نتوصل الى الشكل العشري المنتظم المحتب وأما اذا وصلت ثلاثاً ثلاثاً فاننا نتوصل  
 \* الى الشكل العشري المنتظم النجمي

\* ثالثاً - اذا قسم محيط الدائرة الى خمسة عشر جزءاً متساوية ووصلت نقط التقاسيم المتوالية  
 \* بمستقيمات فاننا نتوصل الى الشكل ذي الخمسة عشر ضلعاً المنتظم المحتب وأما اذا وصلت نقط  
 \* التقاسيم اثنين اثنين أو أربعاً أربعاً أو سبعاً سبعاً فاننا نتوصل الى الاشكال الثلاثة المنتظمة  
 \* النجمية ذوات الخمسة عشر ضلعاً



متساوية لتساوى الاضلاع الثلاث فيها وحيث اننا المستقيمت ١ م و ٢ م و ... الخ تكون منصفة للزوايا ١ و ٢ و ٣ و ... الخ

ثانيا - حيث كانت نقطة م موجودة على جميع المستقيمت المنصفة للزوايا المتساوية ١ و ٢ و ٣ و ... الخ فنكون جميع الاعمدة النازلة منها على أضلاعها مثل م ح و م ط و ... الخ متساوية وبناء عليه اذا جعلت نقطة م مركزا ونصف قطر مساو أحدها م ح ورسم محيط دائرة فانه يمر بالنقط ح و ط و ي و ... الخ ويكون مماسا للاضلاع فيها واذا ن فقد أمكن تمرير محيط دائرة داخل الشكل المقروض عيس أضلاعه

وأما البرهنة على عدم امكان امر ا ر محيط آخر غير السابق فانه لو فرض امكان امر ا ر محيط آخر موف للشرط المتقدم يقال حيث ان مركزه لابد أن يكون على ابعاد متساوية من أضلاع الشكل المذكور فلا يكون موجودا الا في تقاطع المستقيمت المنصفة للزوايا ١ و ٢ و ٣ و ... الخ وحيث فلا يكون خلاف نقطة م ولا يكون نصف قطره خلاف العمود م ح وهو المطلوب

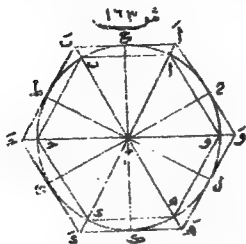
تنبيه ١ - نقطة م التي هي مركز مشترك للدائرتين المرسومتين خارج الشكل وداخله تعتبر أيضا مركزا للشكل ولهذا السبب يطلق اسم الزاوية المركزية في الشكل المنتظم على الزاوية ا م ب التي رأسها بالمركز وضلعاهما نصف القطرين الواصلان الى النهايتي الضلع ا ب ولما كانت أضلاع الشكل كلها متساوية تكون الزوايا المركزية كذلك وحيث فقد ارأى واحدة منها يساوي خارج قسمة أربع قوائم على عدد أضلاع الشكل

تنبيه ٢ - حيث ان برهنة النظرية المتقدمه مؤسسه على تساوى الاضلاع المتوالية ا ب و ب ح و ح د و ... الخ وعلى تساوى الزوايا المحصورة بينها فينتطبق ضرورة على الخط المنكسر المنتظم بمعنى أن كل خط منكسر منتظم يمكن أن يرسم عليه دائرة تمر برؤوس زواياه وأخرى داخله تسمى أضلاعه

### دعوى علميه

(١٧٤) اذا علم مضلع منتظم ا ب ح د ه و مرسوم داخل دائرة والمطلوب رسم شكل منتظم على الدائرة متشابه للاول أى مقدمه في عدد الاضلاع (شكل ١٦٣) طرقة ذلك أن نرسل من المركز أنصاف الاقطار م ح و م ط و م ي و ... الخ وعمودية على أضلاع الشكل المعاد ثم نرسم من النقط ح و ط و ي و ... الخ مماسات لمحيط الدائرة فيشكل بذلك المضلع المنتظم المطلوب

والبرهنة على ذلك يقال يجب أن يبرهن على أن النقط الثلاثة م، و، ب على استقامة واحدة



والوصول الى ذلك يقال

ان المثلثين القائمي الزاوية ح م ب و ب م ط  
فيهما الوتر م ب مشترك والضلع م ح = الضلع  
م ط واذن يكونان متساويين وينتج من تساويهما  
أن الزاوية المركزية ح م ب = الزاوية المركزية  
ب م ط وبناء عليه فهو المستقيم م ب نقطة  
ب وسط القوس ح ط وبعبارة هذا السبب

توجد النقط ح و د و هـ و ... الخ على امتداد المستقيمت م ح و م د و  
م هـ و ... الخ

لكنه حيث كان آ ب موازيا اب و ب ح موازيا ب ح تكون زاوية آ ب ح = زاوية  
ا ب ح وبمثل ذلك تكون باقي زوايا الشكلين متساوية وبذلك يكون الشكل الخارجى متساوى  
الزوايا

والبرهنة على تساوى أضلاعه يؤخذ من تشابه المثلثات التى رؤسها بالمركز أن

$$\frac{ا ب}{ب ج} = \frac{ب ج}{ج د} = \frac{ج د}{د هـ} = \frac{د هـ}{هـ ز} = \frac{هـ ز}{ز ح} = \frac{ز ح}{ح ط} = \frac{ح ط}{ط ق} = \frac{ط ق}{ق ك} = \frac{ق ك}{ك ل} = \frac{ك ل}{ل م} = \frac{ل م}{م ن} = \frac{م ن}{ن ا}$$

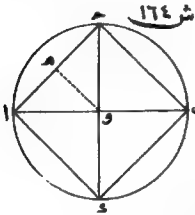
وحيث كانت المقدمات متساوية تكون التوالى كذلك

نتيجة ١ - وبالعكس اذا علم شكل منتظم هو م خارج الدائرة وكان المطلوب رسم شكل  
آخر منتظم داخلها مشابه لاول فانه يكفى في ذلك اما أن يوصل المركز بجميع رؤس الشكل الخارج  
بمستقيمت تقابل المحيط في نقط يوصل بينها بأوتار واما أن يوصل نقط التماس بأوتار فيتشكل  
من كل واحدة من هاتين الطريقتين الشكل المطلوب

نتيجة ٢ - ينتج مما تقدم أنه يمكن أن يرسم على أى دائرة جميع الاشكال المنتظمة التى يمكن  
رسمها داخلها وبالعكس

## دعوى عملية

(١٧٥) المطلوب رسم مربع داخل دائرة معلومة (شكل ١٦٤) أعني أن المطلوب تقسيم محيط دائرة معلومة الى أربعة أقسام متساوية

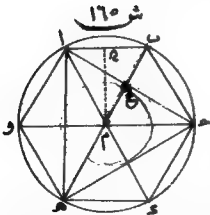


نحل هذه المسئلة مباشرة بواسطة رسم قطرين متعامدين فيه  $AB$  و  $CD$  ثم وصل نقطة التقاسيم المتوالية ببعضها بمستقيمت فينشكل بذلك المربع  $ABCD$  (١٧٠) نتيجة ١ - إذا رمزنا بالحرف  $A$  لضع المربع  $ABCD$  وبالرمز  $B$  لنصف قطر الدائرة و  $A$  فإنه يتحصل من المثلث القائم الزاوية  $AOB$  أن  $A^2 = B^2$  أو  $A = B$  واذن فالكميتان  $A$  و  $B$  غير متناسبتين

نتيجة ٢ - إذا قسم كل جرم من أجزاء المحيط الأربعة الى قسمين متساويين ثم قسم كل قسم من هذه الأقسام الى جرمين متساويين وكل واحد من هذه الأجزاء الأخيرة الى جرمين متساويين أيضا وهكذا وفي كل مرة وصلت النقاط المتوالية بمستقيمت فإنه يتشكل من ذلك المثلثين المنتظم المرسوم داخل الدائرة ذوو الستة عشر ضلعا المنتظم وذو الاثنى وثلاثين ضلعا المنتظم وهكذا

## دعوى عملية

(١٧٦) المطلوب رسم المسدس المنتظم داخل الدائرة (شكل ١٦٥)



نفرض ان المسئلة محمولة وان  $AB$  هو ضلع المسدس المطلوب أى ان القوس المقابل له هو سدس المحيط فإذا وصل نصف القطرين  $AB$  و  $CD$  فالثلث الحادث يكون متساوى الساقين وحيث كانت زاوية  $A$  مساوية  $\frac{1}{3}$  قاعته أو  $\frac{1}{3}$  قاعته يكون مجموع الزاويتين الآخرين المتساويتين مساويا  $\frac{2}{3}$  قاعته وحينئذ يكون مقدار كل واحد منهما مساويا  $\frac{1}{3}$  قاعته ويكون المثلث

بناء عليه متساوى الاضلاع ويكون ضلعه  $AB$  مساويا لنصف القطر  $OA$  وحينئذ فلجلا رسم المسدس المنتظم داخل الدائرة وأتقسيم محيط دائرة الى ستة أقسام متساوية يطبق نصف القطر على المحيط ستة مرات كله وتر

نتيجة ١ - اذا وصل بين نقط التقاسيم اثنتين اثنتين بمسقطيات تشكل من ذلك المثلث المتساوي الاضلاع ولايجاد النسبة الكائنة بين ضلعه ونصف القطر يلاحظ ان الشكل م ا ب ح شكل معين وعلى مقتضى ما تقرر في نظرية (عمره ١١٩ نتيجة ١) يحدث بفرض ان ا يدل على ضلع المثلث

أ<sub>1</sub> + س<sub>4</sub> = س<sub>1</sub> ومنه س<sub>3</sub> = أ<sub>1</sub> أو س<sub>4</sub> = 1

وحيث قد يكون ضلع المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخل الدائرة ونصف قطرها غير متساوين ولنتلاحظ أولاً - ان العمود م ح النازل من مركز الدائرة على أحد اضلاع المثلث المتساوي الاضلاع ا ح ه مساو ونصف قطر الدائرة المذكورة

ثانياً ان العمود  $M$  الناظر من مركز الدائرة على أحد اضلاع المسدس مساو نصف ضلع المثلث المتساوي الاضلاع

نتيجة ٢ - بواسطة تقسيم القوس الى جزئين متساويين تقسيمهما الى اربعة اقسام يمكن ان يرسم داخل الدائرة جميع المضلعات المنتظمة التي تكون عدداً ضلعاً لها حدود هذه الدائرة

$$\dots, {}^4r \times r, {}^5r \times r, {}^6r \times r, {}^7r \times r, {}^8r$$

## دعوى علمية

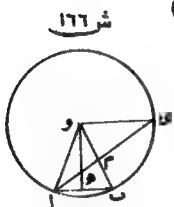
(١٧٧) المطاوع رسم المعشر المنتظم داخل الدائرة (شكل ١٦٦)

(١٧٧) المصنوع برسم المنعصر المستقيم داخل الدائرة (سكن ١٦٦) ١٦٦

نفرض ان المسئلة محولة وان  $ا ب$  هو ضلع المعسر المطلوب  
 فاذ وصل نصفا القطرين  $وا$  و  $وب$  فالثلث الحادث  $اوب$   
 يكون متساوي الساقين غير ان زاوية  $و = \frac{٤}{١١}$  أو  $\frac{٢}{٥}$  قاعته  
 وعليه فيكون مجموع زاويتي المتساويتين مساويا  $\frac{٨}{٥}$  قاعته  
 ويكون مقدار كل واحد منهما مساويا  $\frac{٤}{٥}$  قاعته ثم اذام  
 المستقيم المنصغر زاوية  $ا$  يكون مقدار زاوية  $ام$  مساويا  
 ضرورة  $\frac{٤}{٥}$  قاعته واذن يكون كل واحد من الثلثين  $ام$  و  $ام$  متساوي الساقين  
 ويكون  $ا ب = ام = م ب$  ولكنه شاء على ما تقر في نظرية ثمة ١٢٣ بحث

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{أو} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

(۹) **التحفة البیه (ثانی)**







ليكن أب ضلع المعشر المنتظم المحذب المرسوم داخل الدائرة وفيمد أب على استقامته ويؤخذ

البعد  $a =$  أو ثم وصل  $\omega$  فيكون موضع

المخمس المنتظم لان زاوية  $\alpha = \frac{4}{5}$  قائمة ثم يرسم

من نقطة  $\rightarrow$  المستقيم  $\rightarrow$  د  $\rightarrow$  مماسا لمحيط الدائرة ووصل

وإذا أتينا المامس حذو مسلوا ضلع العشر

## المنتظم أب مبت المطاوب

لذلك يقال من المعلوم ان

$$\frac{50}{10} = \frac{10}{2} \text{ أو } 50 \times 2 = 100$$

وحيث كان  $ab$  مساويا ضلع العشر المنتظم ،  $ac$  مساويا نصف القطر يحدث

$$\frac{11}{13} = \frac{17}{21}$$

وحينئذ يكون  $s = a$  وهو المطلوب

نتيجة ١ - إذا رمز بالحرف  $\epsilon$  اضلع العشر والحرف  $\epsilon$  اضلع الخمس وبالرمز  $\mu$  لنصف

القطر حدث

$$\text{و} \quad (0.7 - 1.0) \frac{L_u}{L} = L_u + (1 - 0.7) \frac{L_u}{L} = L_u + L_u = 2L_u$$

$$z = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$$

\* نتيجة ٢ - (شكل ١٦٨) يمكن الوصول الى معرفة طول ضلعي الخمس المنتظم والمعاشر

• المستقيم المرسوم من داخل الدائرة بطريقة سهلة كما يأتي

\* وهو أن يرسم داخل الدائرة قطران متعامدان أب و ح د

\* ثم يرسم من نقطة م وسط نصف القطر د و محيط دائرة

\* بنصف قطر مساو  $\frac{1}{2}a$  فيقطع المستقيم  $cd$  في نقطة  $e$

\* فيكون هـ و هو ضلع العشر المستقيم ، أه هو ضلع الخمس

\* المنتظم المرسوم من داخل الدائرة وذلك لان

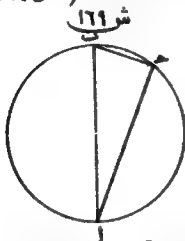
$$\text{أو } \frac{r_1}{r_2} = h_m = 1 \text{ أو } \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{r_2} = h_m = 1 \quad *$$

• **وحيث يكون**

$$(1 - \overline{0}) \frac{y}{r} = \frac{y}{r} - \overline{0} \frac{y}{r} = \frac{y}{r} - 0 = \frac{y}{r} - 0 = 0, \quad \text{e}$$

\* وهو مقدار ضلع العشر المنتظم السابق إيجاده بتمرة (١٧٥) ويتابع عليه يكون  $أه$  هو ضلع الخمس المنتظم كما ذكر

\* تنبيه - بعد تقسيم المحيط الى خمسة أقسام متساوية اذا وصل بين نقط التقاسيم اثنتين اثنتين فإنه يتشكل ضرورة الخمس المنتظم النجمي وحساب مقدار ضلعه  $أه$  (شكل ١٦٩)



\* فصل القطر  $أب$  والمستقيم  $ح$  ضلع العشر المنتظم المحذب فالمثلث القائم الزاوية  $أح ب$  يؤخذ منه

$$أح = أ ب - ح$$

\* غير أن

$$أ ب = ٢, ح = \frac{١}{٢} (١ - ٥\sqrt{٥})$$

\* فيكون

$$أح = أ ب - ح = ٢ - \frac{١}{٢} (١ - ٥\sqrt{٥}) = \frac{٣}{٢} + \frac{٥\sqrt{٥}}{٢}$$

$$= \frac{٣}{٢} + \frac{٥\sqrt{٥}}{٢} \quad \text{أو} \quad \frac{٣}{٢} + \frac{٥\sqrt{٥}}{٢} = ١٠\sqrt{٥} + ٥\sqrt{٥} + ٣$$

\* ويمكن التحقق من أن الضلع  $أه$  هو وتر لمثلث قائم الزاوية ضلعا  $أه$  آخران هما نصف

\* القطر وضلع العشر المنتظم النجمي

\* وذلك لأن مجموع مربعي الضلعين القائم هو

$$٢ + \frac{٣}{٢} + \frac{٥\sqrt{٥}}{٢} = \frac{٣}{٢} + \frac{٥\sqrt{٥}}{٢} + ١٠$$

\* ويكون مقداره إذن مساويا الى

$$\frac{٣}{٢} + \frac{٥\sqrt{٥}}{٢}$$

\* وهو عين المقدار الذي سبق الحصول عليه

## دعوى عملية

(١٧٩) المطلوب رسم الشكل ذي الخمسة عشر ضلعا المنتظم داخل الدائرة (شكل ١٧٠)

ليكن  $أب$  وتر مساويا لنصف القطر و  $أه$  وتر مساويا لضلع العشر المنتظم المحذب فالقوس

$ح$  يعادل  $\frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$  من محيط الدائرة ويكون وتره  $ح$

هو ضلع الشكل ذي الخمسة عشر ضلعا المنتظم المحذب المرسوم داخل الدائرة

\* نتيجة ١ - اذا وصل القطر الى المستقيمان دس، دذ، فتم طبقت نظرية ثمرة (١٤٥)  
\* على الشكل الرابع ا ب د هـ بحث

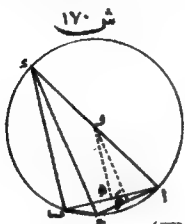
$$us \times a - lu \times s = su \times a \quad *$$

• ويجعل س رمزا للضع الشكلى ذى الخمسة عشر  
• المنتظم يحدث

$$\sqrt{2+10\sqrt{\frac{u}{r}}}\times u=uv^2 \quad *$$

$$-\frac{w}{r}(1-5\gamma)\gamma\bar{r}$$

$$\{ \sqrt{27+10\sqrt{2}} - \sqrt{27+10\sqrt{2}} \} \frac{1}{2} = 0 \quad *$$



\* نتيجة ٢ - متى قسم المحيط الى خمسة عشر جزءا متساويا وتوصلت نقط التقاسيم اثنين اثنين أو أربع أربع أو سبع سباعا فانه يتكون من ذلك الاشكال الثلاثة المستطعة الصعبة ذوات الخمسة عشر ضلعا ويمكن حساب مقادير أضلاع كل واحد منها بواسطة خاصية الشكل الرباعي المرسوم داخل الدائرة الذي سبق استعماله غير أن هذه المقادير من شدة ولا فائدة فيها

## الفصل الثاني

### في مقارنة المصطلحات المنظمة بعضها

## دعوى نظرية

(١٨٠) النسبة بين محيطي الشكائين المنتظمين المتساويين كالنسبة بين قطري الدائرتين المرسومتين خارجهما أو داخلهما والنسبة بين

سطحهما كالنسيبة بن منيعات تلك

الانصاف الاقطار (شكل ١٧١)

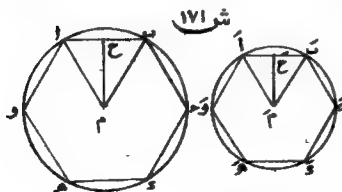
إذا كان الشكلان المنتظمان معا

ہما اب جڑھو، آت جڑھو

ونصفاً قطري الدائرتين المرصومتين

خارجهما م ا , م آ ونصفا

قطري الدائرتين المرسومتين داخلهما م ح و م ح يقال



أولاً - حيثان الشكلين متشابهان يحدث

$$\frac{\text{محيط } \triangle \text{ د ه و}}{\text{محيط } \triangle \text{ ا ب ج}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ج}}$$

وحيث ان كل واحد من المثلثين ا ب ج و ا م ح يشابه نظيره ا م ج و ا م ح من الشكل الثاني يحدث

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ا م}}{\text{ا ح}} = \frac{\text{ع م}}{\text{ع ح}}$$

وافذن يكون

$$\frac{\text{محيط } \triangle \text{ ا ب ج د ه و}}{\text{محيط } \triangle \text{ ا ب ج}} = \frac{\text{ا م}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ع م}}{\text{ع ح}}$$

ثانياً - ينتج من تشابه الشكلين المستطمين أن

$$\frac{\text{سطح } \triangle \text{ ا ب ج د ه و}}{\text{سطح } \triangle \text{ ا ب ج}} = \frac{\text{ا ب}}{\text{ا ج}}$$

ومن الثلاث المتشابهة يؤخذ

$$\frac{\text{ا ب}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ا م}}{\text{ا ح}} = \frac{\text{ع م}}{\text{ع ح}}$$

وافذن يكون

$$\frac{\text{سطح } \triangle \text{ ا ب ج د ه و}}{\text{سطح } \triangle \text{ ا ب ج}} = \frac{\text{ا م}}{\text{ا ج}} = \frac{\text{ع م}}{\text{ع ح}} \text{ وهو المراد}$$

## تعريف

(١٨١) الكمية المتغيرة هي التي تأخذ على التوالي أحوالاً مختلفة من المقادير

ونهاية أي كمية هي كمية ثابتة تقرب منها شيئاً كمية متغيرة بدون أن تبلغها

(١٨٢) يوجد في علمي الحساب والهندسة أمثال كثيرة للكميات المتغيرة والنهايات فنمثل لك

بأحدها فنقول

من المعلوم أن مقدار الزاوية في أي شكل منتظم عدد أضلاعه م هو  $\frac{2}{m} - \frac{4}{m}$  (١٦٨)

فأذا فرض ان عددا ضلاع الشكل يأخذ في النهاية شيئا فشيئا إلى غير نهاية فإنه يشاهد ان زيادة مقدار الزاوية شيئا فشيئا أيضا ومتى كان  $m$  عددا كبيرا جدد اقرب الكسر  $\frac{1}{m}$  قريبا كليما من الصفر وحينئذ فيقرب مقدار الزاوية قريبا كليما من القاطنين واذن تكون نهاية مقدار رأى زاوية من الشكل المنتظم قاطنين

(١٨٣) من المعلوم أنه اذا كان للعوامل  $A, B, C$  نهايات هي  $a, b, c$  و  $d$  كل نهاية الحاصل  $A \times B \times C \times d$  هي  $a \times b \times c \times d$  أعني أن نهاية حاصل ضرب عدة عوامل مساو لحاصل ضرب نهايات تلك العوامل

## دعوى نظرية

(١٨٤) اذا رسم داخل دائرة وخارجها شكلان منتظمان متحدان في عددا لضلاع ثم ضعفت عددا ضلعا منهما إلى غير نهاية فإن محيطيهما يكون لهما نهاية مشتركة وتلك النهاية لا ترتبط بنفس المضلعين الأصليين ولا بالقانون الذي أتبع في تضعيف عدد الضلاع فإذا كان  $AB$  و  $CD$  ... الخ المضلع المنتظم المرسوم خارج الدائرة وورغم محيطه بالحرف  $E$  وكان  $AB$  و  $CD$  ... الخ المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة ومحيطه  $E$  ثم فرض تقسيم كل واحد من الأقواس  $AB, B, C, D, E$  ... الخ إلى أجزاء متساوية عددها  $n$  ووصلت نقط التقاسيم المتوالية ببعضها ورسم مماسات من منتصفات الأقواس الجديدة فإنه يتكون من ذلك كثيرا أضلاع منتظمان أحدهما خارج الدائرة ومحيطه  $E$  وثانيهما داخلها ومحيطه  $E$  اذا تقرر هذا يقال

أولا - ان المحيط الجديد الخارج  $E$  أصغر من المحيط الخارج الأصلي  $E$  بخلاف المحيطين الداخلين فإن المحيط الجديد  $E$  أكبر من المحيط الأصلي  $E$  وغير ذلك فإن أى المحيطين الداخلين أصغر من أى المحيطين الخارجين

ومن هذا يعلم أن كل واحد من المحيطين  $E$  و  $E$  يقرب من نهاية محدودة ثم اذا رمزنا بالرمز  $n$  لنصف قطر الدائرة المرسومة داخل الشكل  $E$  و  $m$  لنصف قطر الدائرة المرسومة داخل الشكل  $E$  تحصل على مقتضى النظرية السابقة

$$\frac{E}{n} = \frac{E - E}{n - n} \quad \text{أو} \quad \frac{E}{m} = \frac{E - E}{m - m}$$

فأفرضنا الآن أن عدد الاضلاع في كلا الشكلين اخفى الزيادة الى غير نهاية فان الكمية  $\epsilon$  تأخذ في الصغر شيئاً فشيئاً وأما الكمية  $(\sigma - \sigma')$  فانها تأخذ في التناقص أيضاً وتقترب قرباً كلياً من الصغر وذلك لانه حيث كانت أضلاع كل شكل حادث داخل تكثر بعداً عن المركز من أضلاع الشكل السابق فيزيد مقدار  $\sigma'$  شيئاً فشيئاً ونهايته هي  $\sigma$  وبناء عليه فيقرب المقدار  $\epsilon - \epsilon'$  من الصغر ويكون المحيطين نهاية مشتركة نرسم لها بمحرف  $\odot$

ثانياً - إذا نظرنا للشكلين المنتظمين الآخرين اللذين محيطاهما هما  $\epsilon$  و  $\epsilon'$  وفرضنا تضعيف عدد أضلاعهما الى غير نهاية واتبعنا في ذلك قانوناً غير الذي اتبعناه في تضعيف عدد أضلاع الشكلين الاصلين وفرض انهما يقتربان من نهاية مشتركة لهما  $\odot$  فانه يجب ان نبرهن على ان  $\odot = \odot'$

ولذلك يقال حيث كانت  $\odot$  هي النهاية التي يقترب منها  $\epsilon$  الذي يفوق جميع المحيطات  $\epsilon'$  فلا يمكن أن تكون أقل من النهاية  $\odot'$  وهي نهاية المحيطات  $\epsilon'$  وكذلك حيث كانت النهاية  $\odot'$  نهاية للمحيطات  $\epsilon$  التي تفوق جميع المحيطات  $\epsilon'$  فلا يمكن ان تكون أقل من  $\odot$  نهاية المحيطات  $\epsilon$  وانذاً فيكون  $\odot = \odot'$

نتيجة ١ - النهاية المشتركة للمحيطين  $\epsilon$  و  $\epsilon'$  المرسومين خارج الدائرة وداخلها هي ما نسمي محيط الدائرة

نتيجة ٢ - ينتج مما تقدم ان طول محيط الدائرة هو دائماً أقل من محيط أى شكل منتظم مرسوم خارجها وأكبر من محيط أى شكل منتظم مرسوم داخلها

نتيجة ٣ - يمكن تطبيق جميع البراهين التي سبق ذكرها على جزء من محيط دائرة بواسطة ان يرسم داخله وخارجه خطان منتظمان منكسران وحيث دفعنا طول أى قوس النهاية المشتركة  $\odot$  لطول خط منكسر منتظم متغيرا ما مرسوم داخل القوس أو خارجه متى ضوعف عدد أضلاعه الى غير نهاية

نتيجه - لا يمكن مقارنة طول قوس من منح ب طول خط مستقيم بل ولا يمكن ان يقال ان احدهما أكبر من الآخر ولهذا اقد التزمنا عند مقارنته بالخط المستقيم تعديل طول الخط المنحني

## دعوى نظرية

(١٨٥) إذا رسم داخل الدائرة وخارجها شكلان منتظمان متحدان في عدد الاضلاع وضوعف عدد أضلاعهما الى غير نهاية فان محيطيهما يكون لهما نهاية مشتركة هي سطح الدائرة (شكل ١٦٣)

فاذا رمزنا بالرمزين  $s$  و  $m$  لسطحي الشكلين المرسومين خارج الدائرة وداخلها ثم قسم كل واحد من الاقواس  $آآ$  و  $بب$  و  $حح$  و  $دد$  الخ الى اقسام متساوية عددها  $n$  ووصل بين نقط التقاسيم المتوالية بمستقيمت ثم رسم مماسات من نقط واسط الاقواس الجديدة فانه يتكون من ذلك شكلان منتظمان أحدهما  $s$  خارج الدائرة وثانيهما  $m$  داخلها ثم اذا استمر في تقسيم الاقواس الحادة فانا نتقل من الشكلين  $s$  و  $m$  الى  $s_1$  و  $m_1$  ومن  $s_1$  و  $m_1$  الى  $s_2$  و  $m_2$  وهكذا

ولما كان كل سطح من سطوح الاشكال الخارجة كبر من سطح الدائرة لاشتماله عليه وكل سطح من سطوح الاشكال الداخلة أقل من سطح الدائرة لانحصاره فيه وانه كلما ضعف في عدد الاضلاع فان سطوح الاشكال الخارجة تقناقص وسطوح الاشكال الداخلة تزايد فلا بد ان من أن نجزم بان السطوح  $s$  و  $s_1$  و  $s_2$  و  $s_3$  الخ تتقارب شيافشياً من نهاية وكذلك السطوح  $m$  و  $m_1$  و  $m_2$  و  $m_3$  الخ لكن بناء على ماقرر بنظرية عمدة ١٧٨ يحدت

$$\frac{s}{m} = \frac{s_1}{m_1} = \frac{s_2}{m_2} = \frac{s_3}{m_3} \text{ أو } \frac{s - m}{m} = \frac{s_1 - m_1}{m_1} = \frac{s_2 - m_2}{m_2} = \frac{s_3 - m_3}{m_3}$$

ومن ذلك يعلم انه كلما زيد في تضعيف عدد الاضلاع الى غير نهاية فان الفرق  $(s - m)$  يصير كمية صغيرة جداً وبناء عليه فنهاية السطح  $s$  هي عين نهاية السطح  $m$  ولما كان سطح الدائرة محصوراً دائماً بين هذين السطحين فيكون هو تلك النهاية المشتركة

نتيجة - لا يمكن مقارنة سطح الدائرة مباشرة بـ سطح المربع المعتبر وحده لانحناء الدائرة غير انه بواسطة النظرية المتقدمة يتيسر لنا ذلك بواسطة ان نأخذ مساحة الشكلين المذكورين ونبحث عن النهاية التي يقربان منها في ضعف عدد أضلاعهما الى غير نهاية

## دعوى عملية

(١٨٦) اذا علم محيطا شكلين منتظمين  $s$  و  $m$  عدداً لأضلاع كل واحد منهما  $n$  وكان احدهما  $s$  موصلاً خارج الدائرة والثاني  $m$  داخلها والمطلوب تعيين محيطي الشكلين  $s_1$  و  $m_1$

(١٠) الصفحه اليه (ثاني)

المتضمنين المرسومين خارج الدائرة وقد اخلوا واعدوا ضلعا كل منهما ٥٢ (شكل ١٧٢)

ليكن  $\mathcal{H}$  و  $\mathcal{A}$  ضلعين متناظرين من الشكلين  
المعلومين بحيث ان

$$, \quad \mu_7 X_2 \gamma = \mu_7 X_2 = 2$$

$$b_1 x_2 = b_1 x_2 = z$$

فقتل أه ، هـ وزسم الماسين أو ، ح  
فقتل

$$h_1 \times \omega_1 = h_2 \times \omega_2 = \tau, \quad \omega_1 \times \omega_2 = \omega_2 \times \omega_1 = \tau$$

اذا تقر هذا مقال

أولاً - حيث كان م و منصف الزاوية ح م ه يحدث

وہ = و ۲۱ غران ع = ع ۲۴ فیصلہ

$\frac{222}{2+2} = 1$  ومن هذا نجد  $\frac{22}{2+2} = \frac{1}{2}$  أو  $\frac{22}{2+2} = \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$

فأيا - يؤخذ من المثلثين المتشابهين

وهی، ه ا ط ان ی ه = ه ا ط أو  $\frac{ه \times ط}{ا \times ط} = \frac{ه \times ی}{ا \times ط}$  أو  $\frac{ه \times ط}{ا \times ط} = \frac{ه \times ی}{ا \times ط}$

ومنہ  $\frac{z}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}}$  او  $z\bar{z} = \bar{z}z$  وهو المطلوب ایجادہ

نتيجة - الارتباط السابق يسهل ان اذا اعتبرنا بدل المحيطين عكسهما أعني ان

$$\sqrt{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}, \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

وحينئذ اذا وضعنا الاجل الاختصار  $\frac{1}{z}=1$  ,  $\frac{1}{z}=1$  ,  $\frac{1}{z}=1$  ,  $\frac{1}{z}=1$

## محدث

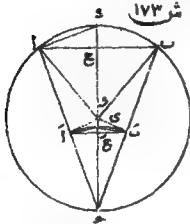
$$\overline{11}Y=1, (1+1)\frac{1}{2}=1$$

وتسهل البرهنة بواسطة الأعمال الحسابية على ان  $|1 - \frac{1}{2}| > |1 - \frac{1}{2}|$



## دعوى عملية

(١٨٧) اذا علم  $\alpha$  و  $\beta$  نصفا قطرى الدائرتين المرسومين خارج وداخل شكل منتظم



والمطلوب إيجاد مقدارى  $\alpha$  و  $\beta$  لشكل آخر منتظم  
متضمن الأول فى طول المحيط ومضاعف له فى عدد  
الاضلاع (شكل ١٧٣)

ليكن  $AB$  ضلع المضلع المعطى و  $\alpha = \angle AOB$  و  $\beta$   
نصف قطر الدائرة الخارجة و  $\beta = \angle OCB$  نصف قطر  
الدائرة الداخلة

فنجد  $\alpha$  و  $\beta$  على استقامته حتى يلاقى المحيط فى نقطة  $C$

ثم نصل  $AC$  و  $BC$  وننزل على هذين الوزنين العمودين  $AD$  و  $BE$  فالمستقيم  $AD$   
يعادل نصف  $AB$  ضرورة لان كل عمود ينصف الوتر المقابل له. وحينئذ فيكون هو ضلع الشكل  
المتضمن الأول فى طول المحيط والمضاعف له فى عدد الاضلاع وحيث ان زاوية  $\alpha$  و  $\beta$  نصف  
زاوية  $AOB$  فيمكن اعتبار نقطة  $C$  مركز هذا الشكل الجديد ويكون  $\alpha = \angle AOB$  و

$\beta = \angle OCB$   
اذا قرر هذا يقال

أولا - حيث ان نقطة  $C$  كانت وسط  $AB$  أى ان

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \angle C \text{ يكون } \alpha = \beta = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$$

ثانيا - يؤخذ من المثلث القائم الزاوية  $AOB$  ان

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \angle C \times \frac{1}{2} \angle C = \frac{1}{4} \angle C \text{ أو } \alpha = \beta = \frac{1}{4} \angle C$$

وهو المطلوب إيجاد

نتيجة - اذا جعلت نقطة  $C$  مركزا ورسم قوس من محيط دائرة نصف قطرها  $AO$   
ووصل أى فيكون هذا المستقيم نصف الزاوية  $AOB$  ويحدث  $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \angle C$   
لكنه حيث كان  $\alpha > \beta$  أو فيكون  $\alpha > \beta$  أى و أعنى ان نقطة  $C$  أكثر قربا من  
نقطة  $C$  عن المركز و واذن يكون

$$\alpha > \beta \text{ أو } \alpha < \beta \text{ أو } \alpha = \beta$$

غيران المثلثين المتشابهين  $د ا ح$  و  $و ا ح$  يؤخذ منهما ان  $و ح = \frac{1}{4} د ح$  فيكون اذن

$$\frac{1}{4} د ح > ح - ح$$

تنبيه - يشاهد ان القانونين اللذين يتوصل منهما الى المقدارين  $ح$  و  $ح$  بدالة  $و$  و  $و$  هما عين القانونين اللذين يتوصل بهما الى  $ا$  و  $ا$  بدالة  $ا$  و  $ا$  (١٨٦)

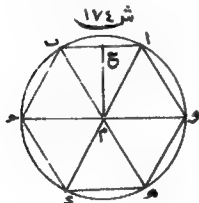
## الفصل الثالث

في قياس محيط الدائرة ومساحتها

### دعوى نظرية

(١٨٨) مساحة الشكل المنتظم تساوي حاصل ضرب محيطه في ربع قطر الدائرة المرسومة

داخله (شكل ١٧٤)



لانه اذا وصل من المركز م الى جميع رؤس الشكل  $ا ب ج د هـ و$  بمستقييات  $م ا$  و  $م ب$  و  $م ج$  و  $م د$  و  $م هـ$  و  $م و$  الخ فان الشكل ينقسم الى المثلثات  $ا م ب$  و  $ب م ج$  و  $ج م د$  و  $د م هـ$  و  $هـ م و$  الخ المتحدة جميعها في القاعدة والارتفاع فاذا ضمت هذه المسامح على بعضها فانه يتوصل الى المساحة المطلوبة

أعني يكون

$$\frac{1}{4} د ح = \frac{1}{4} د ح \times ٦ = د ا ب \times ٦ = م$$

### دعوى نظرية

(١٨٩) النسبة بين محيطي الدائرتين كالنسبة بين نصفي قطريهما والنسبة بين سطحيهما كالنسبة

بين مربعي نصفي القطرين

أولاً - نرسم داخل الدائرتين شكلين مستطمين متعددين في عدد الاضلاع وزمر من المحيطين ما بالحرفين  $ح$  و  $ح$  ولنصفي قطري الدائرتين بالرمزين  $و$  و  $و$  فعلى مقتضى ما نقرر

$$\text{بنبرة (١٨٠) يحدث } \frac{و}{و} = \frac{ح}{ح}$$

وحيث ان هذا التناسب حقيق مهما كان عدد أضلاع الشكلين فإنه ينطبق أيضا على محيطي الدائرتين اللتين هما نهايتان لهما ويحدث

$$(١) \quad \frac{\text{محيط } \text{س}^2}{\text{محيط } \text{س}} = \frac{\text{محيط } \text{س}^1}{\text{محيط } \text{س}}$$

ثانيا - اذا مر سطحى الشكلين بالمرزبين س و س<sup>٢</sup> تحصل أيضا بمقتضى نظرية (١٨٠) أن

$$\frac{\text{س}}{\text{س}^2} = \frac{\text{س}}{\text{س}}$$

وحيث ان هذا التناسب حقيق مهما كان عدد أضلاع الشكلين فينطبق أيضا على سطحى الدائرتين اللتين هما نهايتان لهما ويحدث

$$\frac{\text{سطح } \text{س}^2}{\text{سطح } \text{س}} = \frac{\text{سطح } \text{س}^1}{\text{سطح } \text{س}}$$

تنبيه - يؤخذ من الارتباط (١) أن

$$\frac{\text{محيط } \text{س}^1}{\text{س}^1} = \frac{\text{محيط } \text{س}^2}{\text{س}^2} = \frac{\text{محيط } \text{س}}{\text{س}}$$

أعني أن النسبة الكائنة بين أى محيط دائرة وقطره ثابتة دائما ويرمز لها عادة بحرف ط وهو مقدار غير منطوق أى لا يمكن ايجال مقداره الاعلى وجه التقرب ومعرفة النسبة ط يتوصل بها دائما الى ايجال طول محيط دائرة نصف قطرها معلوم لانه يؤخذ من المتساوية

$$\frac{\text{محيط } \text{س}^1}{\text{س}^1} = \frac{\text{ط}}{\text{س}} \quad \text{ان المحيط} = \text{ط} \times \text{س}$$

أعني أن طول المحيط مساو لحاصل ضرب النسبة في القطر

### د عوى نظرية

(١٩٠) مساحة الدائرة تساوى حاصل ضرب طول محيطها في ربع قطرها

اذا رسم داخل الدائرة شكل منتظم محيطه ح و سطحه س ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله س<sup>٢</sup> فان مساحته تكون مساوية الى ح ×  $\frac{\text{س}^2}{4}$

وحيث ان هذا القانون حقيقى مهما كان أضلاع الشكل فيكون حقيقيا ايضا للدائرة التى هى  
نهاية لها وان يكون

$$\text{نهامس} = \text{نهام} (ع \times \frac{\pi}{3}) = \text{نهام} ع \times \text{نهام} \frac{\pi}{3} \text{ أو سطح الدائرة} = ع \times \frac{\pi}{3}$$

ويتوصل الى عين هذا الناتج بواسطة الشكل المرسوم خارج الدائرة

تجسمة - ينتج من هذا القانون انه لاخذ مساحة الدائرة يحتاج الحلال الى معرفة طول محيطها  
لكنه اذا وضع  $ط$  بلى المحيط يحدث سطح الدائرة =  $ط$  بلى

### دعوى نظرية

(١٩١) مساحة القطاع تساوى حاصل ضرب طول قوسه فى ربع قطر دائرته

لذلك نرمز بالحرف  $هـ$  زاوية القطاع مقدرة بالدرج فن حيث ان النسبة بين أى قطاع والدائرة  
التى هو جزء منها هى عين النسبة بين قوسه ومحيطها أو بين زاويته وأربع قوائمه يحدث

$$\frac{\text{قطاع} هـ}{\text{دائرة} بلى} = \frac{هـ}{360} \text{ أو } \text{قطاع} هـ = \frac{هـ}{360} \times ط بلى$$

وهذا قانون أول لمساحة القطاع

لكنه للوصول الى القانون الذى يطلبه المنطوق نستعوض مساحة الدائرة بمقدارها فيحدث

$$\text{قطاع} هـ = \frac{هـ}{360} \times \text{محيط بلى} \times \frac{\pi}{3}$$

غير أن  $\frac{هـ}{360} \times \text{محيط بلى}$  هو مقدار طول القوس الذى زاويته  $هـ$  كما هو معلوم فيكون

$$\text{قطاع} هـ = \text{قوس} هـ \times \frac{\pi}{3}$$

### دعوى نظرية

(١٩٢) مساحة القطعة تساوى حاصل ضرب ربع قطر الدائرة فى الفرق الكائن بين قوسها وبين

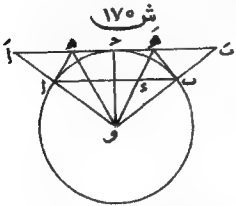
وتر قوس ضعفه (شكل ١٧٥)

ولبرهنة على ذلك يقال من المعلوم ان القطعة  $ا ح ب$  عبارة عن الفرق الكائن بين القطاع

$وا ح ب$  وبين المثلث  $وا ب$  أعني ان

$$\text{قطعة} ا ح ب = \text{قطاع} ا ح ب - \text{مثلث} وا ب$$

غير أن مساحة القطاع تساوى حاصل ضرب قوسه في ربع قطر الدائرة واما الثلث و ا ب فانه يمكن اعتبار قاعدته و ب و ا ما ارتفاعه فهو العمود النازل



من نقطة ا على و ب الذي هو عبارة عن نصفوتر قوس ضعف القوس ا ح ب وبناء عليه يحدث

$$\text{قطعة ا ح ب} = \text{قوس ا ح ب} \times \frac{1}{4} - \text{قوس ب} \times \frac{1}{4}$$

بفرض ان ل رمز لوتر قوس ضعف القوس ا ح ب أو

$$\text{قطعة ا ح ب} = \frac{1}{4} (\text{قوس ا ح ب} - \text{ل})$$

نتيجه - مقدار طول الوتر لا يمكن تعيينه بواسطة المسطرة والبرجل الا اذا كان أحد أضلاع شكل من الاشكال التي يمكن رسمها داخل الدائرة وفي الاحوال الاخر فانه يستعان على تعيينه بواسطة جداول اللوغاريتمات

## دعوى عملية

(١٩٣) المطلوب تعيين مقدار النسبة التقريبية ط بين محيط الدائرة وقطرها يتوصل بالقانونين محيط ب = ٢ ط ب ودائرة ب = ط ب الى أربعة طرق مختلفة لتعيين مقدار ط وهي

أولاً - اذا علم طول المحيط ويطلب تعيين المقدار التقريبي لنصف القطر

ثانياً - اذا علم نصف القطر ويطلب تعيين المقدار التقريبي لطول المحيط

ثالثاً - اذا علم سطح الدائرة ويطلب تعيين المقدار التقريبي لنصف القطر

رابعا - اذا علم نصف القطر ويطلب تعيين المقدار التقريبي لسطح الدائرة

وستكلم هنا على الطريقتين الاولتين تدريجياً فنقول

الطريقة الاولى المعروفة بطريقة المحيطات المتعددة في الطول

(١٩٤) اذا علم طول المحيط وكان المطلوب تعيين المقدار التقريبي لنصف القطر منه يقال

$$\text{اذا كان طول المحيط مساوياً ٢ حدث ٢ = ط منه ومنه ١ = ط}$$

واذن فيكون مقدار نصف القطر هو عكس مقدار ط

فاذا أنشئ شكل منتظم كيفما اتفق بحيث يكون محيطه مساوياً ٢ وكلن ب و ب نصفى

قطري الدائرتين المرسومتين خارجاً وداخله فان محيط الدائرة الذي نصف قطره ب يكون طوله

أكبر من ٢ ضرورة كان محيط الدائرة التي نصف قطره  $\frac{1}{2}$  أقل من ٢ وحينئذ فيكون  
 سه محصورين  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$

فإذا اتقنا الآن من هذا الشكل المنتظم الى آخر متعلمه في الطول ومضاعف له في عدد  
 الاضلاع نجد أن سه محصورين  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$  ويمكن الاستمرار على ذلك الى غير نهاية  
 وحيث انه قد شوهد بجزء (١٨٧) ان الفرق  $\frac{1}{2}$  -  $\frac{1}{2}$  يأخذ في الصغر كلما زيد في تضعيف  
 عدداً ضلوع الاشكال المتعدة في الطول ويكون نهايته الصغر وحينئذ فيمكن الوصول الى  
 عددين ينحصر بينهما سه لا يفرقان عن بعضهما الا بقدر يسير جداً وبذلك يتعين مقدار  
 $\frac{1}{2}$  مع درجة التقريب المطلوبة

فإذا اعتبرنا الشكل المنتظم انه هو المربع الذي ضلعه  $\frac{1}{2}$  تحصل  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$   
 ثم اذا جعلنا هذين المقدارين مبدأ للأعمال واستخرجنا على التوالي مع التعاقب الوسط المتناسب  
 العددي والوسط المتناسب الهندسي للعددين المذكورين كما ذكر بجزء (١٨٧) فاما بتوصل  
 الى المقادير

( $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$ ) و ( $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$ ) و ( $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$ ) و ... وهكذا

ومنى توصل الى مقدارى نصفي قطرين مثل ( $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$ ) مشتركين في الخانات العشرة  
 الاول مثلاً فانه يمكن أخذ أحدهما أو الآخر لمقدار سه أو لمقدار  $\frac{1}{2}$  مقرباً بأقل من واحد  
 من الخانة الحادية عشرة الاعشارية

ولنأخذ الآن انه اذا كتب العددين  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$  وأخذ الوسط المتناسب العددي بينهما ثم أخذ  
 الوسط المتناسب الهندسي بين العددين الآخرين تحصل  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$   
 وحينئذ فيمكن ايراد هذه النظرية

نظرية - اذا كتب العددين  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$  وأخذت دون انقطاع مع التعاقب الوسط الحسابي  
 والهندسي للعددين الآخرين فانه يتكون من ذلك سلسلة تواتج تقرب مقاديرها قرباً كلما من  $\frac{1}{2}$   
 ويكون هذا المقدار محصوراً دائماً بين أى ناتجين متوالين



في حساب  $\frac{1}{ط}$  مقربا بأقل من  $\frac{1}{١٠٠٠٠٠}$

عدد الاضلاع	س	س
٤	٠,٢٥٠٠٠٠٠٠	٠,٢٥٢٥٥٥٢٤
٨	٠,٣٠١٧٧٦٧	٠,٢٢٦٦٤٠٠
١٦	٠,٣١٤٢٠٨٦	٠,٢٢٠٣٦٤٤
٣٢	٠,٣١٧٢٨٦٥	٠,٢١٨٨٢١٨
٦٤	٠,٣١٨٠٥٤١	٠,٢١٨٤٣٧٨
١٢٨	٠,٣١٨٢٤٥٩	٠,٢١٨٣٤١٨
٢٥٦	٠,٣١٨٢٩٣٩	٠,٢١٨٣١٧٨
٥١٢	٠,٣١٨٣٠٥٩	٠,٢١٨٣١١٨
١٠٢٤	٠,٣١٨٣٠٨٩	٠,٢١٨٣١٠٣
٢٠٤٨	٠,٣١٨٣٠٩٦	٠,٢١٨٣٠٩٩
٤٠٩٦	٠,٣١٨٣٠٩٨	٠,٢١٨٣٠٩٨

تنبيه - يجب لأجراء هذا الحساب مع السرعة والضبط

أولا - استعمال عمليات الضرب المختصرة

ثانيا - أن يتذكر عند استخراج الجذر التربيعي لأي عدد الاعتماد على أرقام أعشارية من ناتج الجذر بقدر ما في العدد المقروض من الأرقام الحقيقية

ثالثا - أن يتذكر أن الفرق بين المتوسط الحسابي والمتوسط الهندسي أقل من الفرق بين العددين مقسوما على ثمانية أمثال الأصغر وبناء عليه فيمكن استعاض المتوسط الهندسي بالمتوسط الحسابي عندما يشترك س و س في ثلاثة أرقام أعشارية

الطريقة الثانية المعروفة بطريقة المحيطات

(١٩٥) إذا علم نصف القطر وأريد إيجاد مقدار طول محيط الدائرة التقريبي  
إذا فرض أن مقدار نصف القطر هو  $\frac{1}{ط}$  يكون طول المحيط مساويا ط ويكون عكس طوله هو  $\frac{1}{ط}$  فإذا انشئ في هذه الحالة مربع داخل الدائرة وآخر خارجها تحصل

$$٢ = ع \text{ و } ٢\sqrt{٢} = ح \text{ ويكون } \frac{1}{ح} = \frac{1}{ع} \text{ و } \frac{1}{٢} = \frac{1}{ح}$$

(١١) التضمه اليه (طاني)

وحيث ان المحيط محصور بين  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$  فيكون  $\frac{1}{2}$  محصورا بين  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$   
 فاذا ضعف عددا للاضلاع شيئا فشيئا فإنه يتوصل الى أشكال عددا أضلاعها ٨ و ١٦ و ٣٢  
 والخ وبعقضى ما تقرّر بفرقة (١٨٦) يتوصل الى مقادير الكميات  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  و  
 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  و  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  وهكذا التي تقرب تدريجيا من الكمية  $\frac{1}{2}$

ونشاهد أن الاعمال الحسابية التي توصلنا اليها بهذه الطريقة مطابقة لاعمال الطريقة الاولى  
 تنبيه - لما كان مقدار ط غير منطوق قد اعتنى بعض الحسابين الصابرين في تعيين مقدار  
 عظيم جدا من أرقامه الاعشارية وقد علم منه لأن ٥٠٠ رقم وقد علم أن

$$\text{ط} = ٣,١٤١٥٩ ٢٦٥٣٥ ٨٩٧٩٥ ٢٣٨٤٦ \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots = \frac{1}{\text{ط}} = ٠,٣١٨٣٠ ٩٨٨٦١ \dots\dots\dots$$

وقد بحث (ارشميدس) أقدم المؤلفين في النسبة الكائنة بين المحيط وقطره فوجد أنها محصورة بين

$$\frac{22}{7} = \frac{1}{7} ٣ = \frac{1}{7} ٣ \text{ و } \frac{1}{11} ٣$$

والمقدار الاخير مقبول لبساطته ويحصل منه رقمان أعشاريان حقيقيان

وأما (ادريان متيوس) فقد وجد لهذه النسبة المقدار  $\frac{٢٥٥}{١١٣}$  الذي يحصل منه سبعة أرقام  
 أعشارية حقيقية

ومما يجعل هذا المقدار مفيدا خاصيته الموجبة لفظه عقلا حيث انك لو كتبت على التوالي كل رقم  
 من الارقام الثلاثة الاولى القرنية وهي ٥ و ٣ و ١ مرتين أحدها بجانب الآخر بان تحصل  
 ١١٣٣٥٥ فالارقام الثلاثة الاولى من جهة الشمال تدل على القطر والثلاثة الاخر تدل على

المحيط ويعتبره الى كسر اعشاري يحصل منه ٣,١٤١٥٩٢٩

غير أن مقدار نسبة أرشميدس كافيا لباقي الاعمال

نتيجة - مسألة ترييع الدائرة يمكن أن يعبر عنها كما يأتي

الطالوب رسم مربع بكافئ دائرة معلومة بواسطة المسطرة والبرجل

فيشاهد على مقتضى ما تقرّر في النظريات المتقدمة أن ضلع المربع المجهول يكون وسطا متناسبا  
 بين طول محيط الدائرة وربع قطرها وكان يمكن حل هذه المسألة بتوسير بواسطة المسطرة والبرجل  
 رسم مستقيم بطول محيط الدائرة غير أن معلومية مقدار ط بدرجة التقريب الكافية تسمح  
 بتعديل طول المحيط مع التقريب لكنه لا يعلم الى الآن طريقة عملية لذلك ولم يقدم دليل باستحالة  
 اجراء مثل هذه الطريقة







\* نتيجة ١ - إذا أريد إيجاد مقدار أضلاع الاشكال المنتظمة التي عدداً أضلاعها هي على

\* التعاقب ٨ و ١٦ و ٣٢ و ... الخ يقال

\* نضع أولاً في القانون الاول  $١ = ٢ \sqrt{٢٧}$  فيحدث  $١ = ٢ \sqrt{٢٧}$  وهو

\* مقدار ضلع المثلث المنتظم ثم اذا وضعنا هذا المقدار بدل ١ في القانون للمذكور يحدث

$$١ = ٢ \sqrt{٢٧ + ٢ \sqrt{٢٧} - ٢}$$

\* ومع الاستقرار على ذلك يتوصل الى

$$١ = ٢ \sqrt{٢٧ + ٢ \sqrt{٢٧ + ٢ \sqrt{٢٧} - ٢}}$$

\* وعلى النجوم فان

$$١ = ٢ \sqrt{٢٧ + ٢ \sqrt{٢٧ + ٢ \sqrt{٢٧ + ٢ \sqrt{٢٧} - ٢}}}$$

\* بحيث يكون عدد علامات الجذر مساوياً ١ - ويكون طول محيط هذا الشكل مساوياً الى

$$٢ = ٢ \sqrt{٢٧ + ٢ \sqrt{٢٧} - ٢}$$

\* وبقسمة الطرفين على ٢ فاننا تحصل على مقدار ط وهو

$$١ - ٢ = ٢ \sqrt{٢٧ + ٢ \sqrt{٢٧} - ٢}$$

\* وعدد علامات الجذر الداخلة في هذا المقدار هو ١ - واذن فيمكن ان يكتب

$$٢ = ٢ \sqrt{٢٧ + ٢ \sqrt{٢٧ + ٢ \sqrt{٢٧} - ٢}}$$

\* ويكون عدد علامات الجذر مساوياً ٢

\* نتيجة ٢ - وبمثل ما ذكر يتوصل الى مقدار أضلاع الاشكال المنتظمة التي عدد

\* أضلاعها ١٢ و ٢٤ و ٤٨ و ٩٦ وهكذا

### دعوى علمية

\* (١٩٨) اذا علم نصف قطر الدائرة و ضلع الشكل المنتظم المرسوم خارجها والمطلوب إيجاد

\* مقدار ضلع الشكل المنتظم المرسوم خارجها المضاعف للاول في عدد الاضلاع وبالعكس

\* (شكل ١٧٥)

\* أولاً - إذا كان المعلوم هو  $أ = ١$  و  $و = ١$  فإن المطلوب إيجاد هو  $ه = ١$  يقال

\* حيث أن المستقيم وه منصف الزاوية ادح يحدث

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{أو} \quad \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

\* ومع الاختصار يحدث

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 + 2} = 1$$

\* ويمكن تغيير هذا المقدار بحيث يكون مقامه خاليًا من علامة الجذر وهو

$$\frac{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \quad \text{أو} \quad 2 = 1$$

\* ثانياً - إذا كان المعلوم هو  $أ$  و  $و$  والمطلوب إيجاد هو  $١$  يقال

\* يتوصل من القوانين المتقدمة التي حلت بالنسبة إلى  $١$  أن

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8}{\left(\frac{1}{2}\right)^8 - 4} = 1$$

\* نتيجة - يمكن أن يستنتج من القانون الأول غيرنا على ما تقدم مقدار أضلاع الاشكال

\* المنتظمة المرسومة خارج الدائرة التي عدد أضلاعها هي

$$* \quad ٨ \text{ و } ١٦ \text{ و } ٣٢ \text{ و } ٦٤ \text{ و } ١٢٨ \text{ و } ٢٥٦ \text{ و } ٥١٢ \text{ و } ١٠٢٤ \text{ و } ٢٠٤٨ \text{ و } ٤٠٩٦ \text{ و } ٨١٩٢ \text{ و } ١٦٣٨٤ \text{ و } ٣٢٧٦٨ \text{ و } ٦٥٥٣٦ \text{ و } ١٣١٠٧٢ \text{ و } ٢٦٢١٤٤ \text{ و } ٥٢٤٢٨٨ \text{ و } ١٠٤٨٥٧٦ \text{ و } ٢٠٩٧١٥٢ \text{ و } ٤١٩٤٣٠٤ \text{ و } ٨٣٨٨٦٠٨ \text{ و } ١٦٧٧٧٢١٦ \text{ و } ٣٣٥٥٤٤٣٢ \text{ و } ٦٧١٠٨٨٦٤ \text{ و } ١٣٤٢١٧٢٨ \text{ و } ٢٦٨٤٣٤٥٦ \text{ و } ٥٣٦٨٦٩١٢ \text{ و } ١٠٧٣٧٣٨٢٤ \text{ و } ٢١٤٧٤٧٦٤٨ \text{ و } ٤٢٩٤٩٥٢٩٦ \text{ و } ٨٥٨٩٩٠٥٩٢ \text{ و } ١٧١٧٩٠١٨٤ \text{ و } ٣٤٣٥٨٠٣٦٨ \text{ و } ٦٨٧١٦٠٧٣٦ \text{ و } ١٣٧٤٣٢٤٦٤ \text{ و } ٢٧٤٨٦٤٩٢٨ \text{ و } ٥٤٩٧٢٩٨٥٦ \text{ و } ١٠٩٩٤٥٩٧١٢ \text{ و } ٢١٩٨٩١٩٤٢٤ \text{ و } ٤٣٩٧٨٣٨٨٨ \text{ و } ٨٧٩٥٦٧٧٧٦ \text{ و } ١٧٥٩١٣٥٥٥٢ \text{ و } ٣٥١٨٢٧١١٠٤ \text{ و } ٧٠٣٦٥٤٢٢٠٨ \text{ و } ١٤٠٧٣٠٨٤٤١٦ \text{ و } ٢٨١٤٦١٦٨٨٣٢ \text{ و } ٥٦٢٩٢٣٣٦٦٤ \text{ و } ١١٢٥٨٤٦٧٣٢٨ \text{ و } ٢٢٥١٦٩٣٤٦٥٦ \text{ و } ٤٥٠٣٣٨٦٩٣١٢ \text{ و } ٩٠٠٦٧٧٣٨٦٢٤ \text{ و } ١٨٠١٣٥٤٧٧٢٤٨ \text{ و } ٣٦٠٢٧٠٩٥٤٤٩٦ \text{ و } ٧٢٠٥٤١٩٠٨٩٩٢ \text{ و } ١٤٤١٠٨٣٨١٩٨٨٤ \text{ و } ٢٨٨٢١٦٦٣٣٧٦٨ \text{ و } ٥٧٦٤٣٣٢٦٧٥٣٦ \text{ و } ١١٥٢٨٦٦٥٣٥٠٧٢ \text{ و } ٢٣٠٥٧٣٣٠٧٠٠٤٨ \text{ و } ٤٦١١٤٦٦٠٣٦٠١٦ \text{ و } ٩٢٢٢٩٣٢٠٧٢٠٣٢ \text{ و } ١٨٤٤٥٨٦٤٠٣٦٤٠٦٤ \text{ و } ٣٦٨٩١٧٢٨٠٧٢٨١٢٨ \text{ و } ٧٣٧٨٣٤٥٦١٤٥٦٢٥٦ \text{ و } ١٤٧٥٦٦٩١٢٢٨١٢٥١٢ \text{ و } ٢٩٥١٣٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤ \text{ و } ٥٩٠٢٦٧٦٤٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١١٨٠٥٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٣٦١٠٧٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٧٢٢١٤١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٩٤٤٤٢٨٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٨٨٨٨٥٦٧٦٤٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٧٧٧٧١٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٥٥٥٤٢٧٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٥١١٠٨٣٤١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٠٢٢١٦٦٨٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٠٤٤٣٣٣٦٧٦٤٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٢٠٨٨٦٧٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٤١٧٧٣٤٧٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٨٣٥٤٦٩٤١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٩٦٧٠٩٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٩٣٤١٨٦٤٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٨٦٨٣٦٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٧٣٦٧٣٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٥٤٧٣٤٧١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٠٩٤٦٩٤١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦١٨٩٣٨٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٢٣٧٨٧٦٤٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٤٧٥٧٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٩٥١٥٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٩٩٠٣٠١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٩٨٠٦٠٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٩٦١٢٠٤٧٦٤٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٩٢٢٤٠٩٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٥٨٤٤٨١٩٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣١٦٨٩٦٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٣٣٧٩٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٢٦٧٥٨٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٥٣٥١٧٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٠٧٠٣٤١٧٦٤٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٠١٤٠٦٧٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٠٢٨١٣٤٧٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٠٥٦٢٧٤١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٨١١٢٥٤٨٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٦٢٢٥٠٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٢٤٥٠١٩٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٤٩٠٠٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٢٩٨٠٠٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٥٩٦٠١٥٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥١٩٢٠٣٠٤٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٠٣٨٤٠٦٠٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٠٧٦٨١٢١٩٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤١٥٣٦٢٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٨٣٠٧٢٤٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٦٦١٤٤٩٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٣٢٢٨٩٦٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٦٤٥٧٩٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٣٢٩١٥٨٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٦٥٨٣١٧٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٣١٦٦٣٤١٧٦٤٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٠٦٣٣٢٦٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢١٢٦٦٥٢٧٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٢٥٣٣٠٥٤٠٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٨٥٠٦٦١٠٨١٩٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٧٠١٣٢٢١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٤٠٢٦٤٤٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٨٠٥٢٨٩٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٣٦١٠٥٧٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٧٢٢١١٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٤٤٤٢٣١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٠٨٨٨٤٦٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢١٧٧٦٩٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٣٥٥٣٨٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٨٧١٠٧٦٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٧٤٢١٣٧٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٤٨٤٢٧٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٩٦٨٥٥٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٣٩٣٧٠١٧٦٤٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٧٨٧٤٠٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٥٧٤٨٠٧٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١١١٤٩٦١٤١٩٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٢٢٩٩٢٢٨٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٤٥٩٨٤٤٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٨٩١٩٦٨٩٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٧٨٣٩٣٧٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٥٦٧٨٧٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧١٣٥٧٥١٩٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٤٢٧١٥٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٨٥٤٣٠٦٦٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٧٠٨٦١٣٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١١٤١٧٢٢٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٢٨٣٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٥٦٦٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٩١٣٣٧٦٤٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٨٢٦٧٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٦٥٣٥٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٣٠٧٠١١٩٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٤٦١٤٠٢٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٩٢٢٨٠٤٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٨٤٥٦٠٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١١٦٩١٢١٩٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٣٣٨٢٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٦٧٦٤٦٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٩٣٥٢٩٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٨٧٠٥٨٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٧٤١١٧٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٤٨٢٣٤١٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٤٩٦٤٦٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٩٩٢٩٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٩٨٥٨٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١١٩٧١٧٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٣٩٤٣٤١٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٧٨٨٦٨٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٩٥٧٧٣٦٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٩١٥٤٧٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٨٣٠٩٤٦٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٦٦١٨٩٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٥٣٢٣٨٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٠٦٤٧٦٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦١٢٩٥٣٧٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٢٢٥٩٠٧٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٤٥١٨١٥٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٩٠٣٦٣٠١٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٩٨٠٧٢٦٠٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٩٦١٤٥٢٧٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٩٢٢٩٠٥٤٠٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٨٤٥٨١٠٨١٩٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٥٦٩١٦٢٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣١٣٨٣٢٤٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٢٧٦٦٤٩٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٢٥٥٣٢٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٥١٠٦٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٠٢١٣١٩٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٠٠٤٢٦٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٠٠٨٥٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٠١٧٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٨٠٣٤١٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٦٠٦٨١٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٢١٣٦٣٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٤٢٧٢٧٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٢٨٥٤٣٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٥٧٠٨٦٦٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥١٤١٧٢٦٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٠٢٨٣٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٠٥٦٦٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤١١٣٣٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٨٢٢٦٧٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٦٤٥٣٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٢٩٠٧٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٥٨١٤١٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٣١٦٢٧٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٦٣٢٥٥٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٢٦٥١٠١٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٠٥٣٠٢٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢١٠٦٠٤٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٢١٢٠٩٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٨٤٢٤١٩٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٦٨٤٨٣٧٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٣٦٩٦٧٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٧٣٩٣٥٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٣٤٧٨٦٠١٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٦٩٥٧٢٠٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٣٩١٤٤٠٧٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٠٧٨٢٨٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢١٥٦٥٦٠٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٣١٣١٢٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٨٦٢٦٢٤٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٧٢٥٢٤٠١٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٤٥٠٤٨٠٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٩٠٠٩٦٠٧٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٣٨٠١٩٢١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٧٦٠٣٨٢٦٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٥٢٠٧٦٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١١٠٤١٥٢٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٢٠٨٣٠٥٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٤١٦٦٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٨٨٣٣٢٠٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٧٦٦٦٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٥٣٣٢٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٠٦٦٤٠١٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٤١٣٢٠٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٨٢٦٤٠٧٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٦٥٢٨٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١١٣٠٥٦٠٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٢٦١١٢٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٥٢٢٢٤٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٩٠٤٤٤٠١٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٨٠٨٨٨٠٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٦١٧٧٦٠٧٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٢٣٥٥٢١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٤٤٧١٠٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٨٩٤٢٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٧٨٨٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١١٥٧٦٠٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٣١٥٢٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٦٣٠٤٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٩٢٦٠٨٠١٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٨٥٢١٦٠٣٥٢٩٧٨١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٧٠٤٣٢٠٧٠٥٩٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٤٠٨٦٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٤٨١٧٢٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٩٦٣٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٩٢٦٨٠٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١١٨٥٣٦٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٣٧٠٧٢٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٧٤١٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٩٤٨٢٨٠٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٨٩٦٥٦٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٧٩٣١٢٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٥٨٦٢٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٥١٧٢٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٠٣٤٤٠٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٠٦٨٨٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٢١٣٦٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٤٢٧٢٠٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٨٥٤٤٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٩٧٠٨٨٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٩٤١٧٢٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٨٨٣٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٧٦٦٨٠٢٧٦٢٣٨٢٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٥٥٣٣٦٠٥٤٤٥٦٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣١٠٦٧٢٠٨٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٢١٣٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٢٤٢٦٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٤٨٥٢٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٩٧٠٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٩٩٤٠٨٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٩٨٨١٦٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٩٧٦٣٢٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٧٩٥٢٦٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٥٩٠٥٢٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣١٨١٠٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٣٦٢٠٨٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٢٧٢٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٥٤٤٨٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٥٠٨٩٦٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٠١٧٩٢٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٢٠٣٥٨٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٤٠٧١٦٨٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٨١٤٣٣٦٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٦٢٨٦٧٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٣٢٥٧٣٤٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ٦٥١٤٦٨٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{ و } ١٣٠٢٩٣٠١٣٨١١٩١٢٥٢٤٨ \text{$$

\* يكون هو ضلع الشكل المضاعف الخارج ثم من الحرفين ١ و ١ لمساحي الشكلين  
المعاودين ١ و ١ لمساحي الشكلين المطاوين يحدث

$$* \quad ١ \times ١ = ١ \quad و \quad ١ \times ١ = ١$$

$$* \quad ١ \times ١ = ١ \quad و \quad ١ \times ١ = ١$$

\* اذا تقرر هذا يقال

\* أولا - يؤخذ من المثلثات

$$* \quad ١ \times ١ = ١ \quad و \quad ١ \times ١ = ١ \quad ان \quad ١ \times ١ = ١$$

\* وبناء عليه يكون

$$* \quad ١ \times ١ = ١ \quad او \quad ١ \times ١ = ١ \quad او \quad ١ \times ١ = ١$$

\* ثانيا - يحدث ايضا ان

$$* \quad ١ \times ١ = ١ \quad و \quad ١ \times ١ = ١ \quad و \quad ١ \times ١ = ١$$

\* وبتغيير الوسطين يحدث

$$* \quad ١ \times ١ = ١ \quad و \quad ١ \times ١ = ١ \quad و \quad ١ \times ١ = ١$$

\* وحينئذ يكون ايضا

$$* \quad ١ \times ١ = ١ \quad او \quad ١ \times ١ = ١ \quad و \quad ١ \times ١ = ١$$

\* وبناء عليه يكون

$$* \quad ١ \times ١ = ١$$

\* تنبيه - اذا اخذ عكس مقادير الكميات ١ و ١ و ١ فانه يتوصل الى قوانين

\* يقرب مقاديرها من المقادير السابق ايجادها (بمرة ١٨٧)

$$* \quad ١ \times ١ = ١ \quad و \quad \left( ١ + ١ \right) \times ١ = ١$$

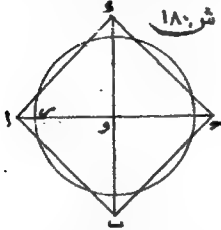
\* نتيجة - هذه القوانين يتوصل منها الى ايجاد المقدار التقريبي للنسبة ط بطريقة جديدة

\* فنفرض ان  $١ = ١$  فيكون سطح الدائرة مساويا ط ولتعيينه يقال





\* قوسا من محيط دائرة يقطع المماس في نقطة د ثم تصل ب د فيقطع محيط الدائرة في نقطة هـ. فإذا وصل ا هـ يكون هو المقدار التقريبي لضع المربع المكافئ للدائرة وهذه الطريقة النسبوية للمعلم (سونيت) هي مفيدة في الاعمال فبحساب مقدار ضلع المربع المكافئ للدائرة التي نصف قطرها الوحدة علم انه يساوى ١,٧٧٢٤٥٣٨ ومقدار الضلع المذكور من طريقة (سونيت) هو ١,٧٧٢٤٥٠٢



\* الثانية - (شكل ١٨٠) يرسم قطران متعامدان داخل الدائرة ويقسم أحداً أنصاف الأقطار و س مثلاً الى أربعة اجزاء متساوية ثم نضم أحدها هذه الاجزاء الى نصف القطر و س بحيث يكون  $ا = \frac{س}{٤}$  و س ثم نرسم المربع الذي يكون فيه و ا نصف أحد قطريه فيكون مكافئاً لسطح الدائرة أمام مقدار ضلع المربع المتحصل من هذه الطريقة فهو ١,٧٦٨٠٠٠٠٠ بدل المقدار ١,٧٧٢٠٠٠٠٠ وهذا التقريب كافٍ أحياناً في الاعمال

## الفصل الخامس

### تمارينات

- ١ - المطلوب إيجاد مساحة المربع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ٥ أمتار وكذا المرسوم خارجها
- ٢ - إذا فرض مربعان ضلع أحدهما يساوي قطر الآخر والمطلوب معرفة النسبة بينهما
- ٣ - المطلوب إيجاد مساحة المربع الذي علم أن الفرق بين قطريه وضعه ٦ أمتار
- ٤ - ما مقدار نصف قطر الدائرة المرسومة داخل مربع يكون الفرق بين قطريه وضعه مساوياً ٦ أمتار
- ٥ - إذا كانت مساحة المثلث المتساوي الاضلاع تساوى ٤٥٠ متر مربع والمطلوب إيجاد مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة المرسومة على المثلث
- ٦ - إذا كانت مساحة التاج المحصور بين محيطي دائرتين متحدتي المركز مساوية ٢٥,١٣٢٨ متر مربع وكان نصف قطر محيط الدائرة الكبرى يزيد مترين عن نصف قطر محيط الدائرة الصغرى والمطلوب معرفة نصفي قطري محيطي الدائرتين المذكورتين



- ٧ - إذا اتحد محيطا دائرتين في المركز فانه يطلب البرهنة على أن وتر المحيط الاكبر المماس للمحيط الاصغر يكون قطر الدائرة مساحتها تساوى مساحة التاج
- ٨ - اذا كانت مساحة القطاع تساوى ٢٠,٢٦٥٠ مترامربعاً وكان مقدار درج قوسه المعتبر قاعدة له مساويا ١٥ ٦٥ والمطلوب معرفة طول قوسه
- ٩ - المطلوب حساب مساحة القطعة التي مقدار درج قوسها ٥٠ من دائرة نصف قطرها ٣٣
- ١٠ - اذا دل عدد ٣ أمتار على نصف قطر دائرة فكم مقدار نصف قطر الدائرة التي مساحتها أربعة أمثال الاولى
- ١١ - المطلوب تعيين نصف قطر الدائرة المكافئة لعدة دوائر معلومة أو للفرق بين دائرتين معلومتين
- ١٢ - المطلوب تقسيم دائرة الى جزئين متكافئين أو عدة أجزاء متكافئة بواسطة دائرة أو دوائر أخرى متحدة مع الاولى في المركز
- ١٣ - المطلوب تقسيم دائرة الى جملة أجزاء مناسبة لاعداد معلومة بواسطة دوائر أخرى متحدة معها في المركز
- ١٤ - المطلوب معرفة عدد الترابيع الخام التي شكلها سدس منتظم طول ضلعه ١٢,٠ متر لفرشها في محل مستطيل الشكل طوله ٥ أمتار وعرضه ٤ أمتار
- ١٥ - ما مساحة القطعة التي قوسها ٦٠ من دائرة نصف قطرها ٣ متر
- ١٦ - المطلوب إيجاد النسبة الكائنة بين المسدسين المنتظمين المرسوم أحدهما خارج الدائرة والثاني داخلها
- ١٧ - اذا علم ضلع المثلث المرسوم داخل الدائرة والمطلوب حساب سطح الدائرة المرسومة عليه
- ١٨ - المطلوب إيجاد النسبة بين سطح الدائرة والمثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخلها
- \* ١٩ - اذا كان مجموع مساحتي الدائرة والمثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخلها مساويا ٣ أمتار مربعاً والمطلوب معرفة مساحة كل واحد منهما
- \* ٢٠ - المطلوب إيجاد مساحة المثلث المنتظم المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ٢,٢٠ متر
- \* ٢١ - اذا كانت مساحة المثلث المنتظم تساوى ٢٠ مترامربعاً والمطلوب تعيين نصف قطري الدائرتين المرسومتين داخله وخارجه

(تم الجزء الثاني من كتاب الصفة البهية ويليها الجزء الثالث)

## فهرسة الجزء الثانى من التحفة البهيه

صفحة	
٣	الجزء الثانى فى مساحات كثير الاضلاع والخطوط المناسبة وتشابه الاشكال والاشكال المنتظمة ومساحة الدائرة
٣	الباب الاول فى مساح كثير الاضلاع والخطوط المناسبة وتشابه الاشكال
٣	الفصل الاول فى مساح كثير الاضلاع
١٧	الفصل الثانى فى الخطوط المناسبة
٢٢	الفصل الثالث فى تشابه الاشكال
٢٣	المبحث الاول فى تشابه المثلثات
٣٠	المبحث الثانى فى تشابه كثيرات الاضلاع
٣٤	الفصل الرابع فى أوتار الدائرة وقواطعها
٣٦	الفصل الخامس فى نظريات مهمة تتعلق بالمثلثات وبالأشكال الرباعية التى يمكن رسمها داخل الدائرة
٤٢	الفصل السادس فى الدعاوى العملية الاساسية
٥٦	الفصل السابع فى مبرهنات
٥٩	الباب الثانى فى الاشكال المنتظمة وقياس الدائرة
٦١	الفصل الاول فى الاشكال المنتظمة المرسومة داخل الدائرة وخارجها
٦٩	الفصل الثانى فى مقارنة المضلعات المنتظمة ببعضها
٧٦	الفصل الثالث فى قياس محيط الدائرة ومساحتها
٨٣	الفصل الرابع فى الدعاوى العملية المتعلقة بالمضلعات المنتظمة
٩٠	الفصل الخامس فى مبرهنات

## المحـزء الثالث

من كآب الـحفء البهية في الاصول الهندسية

وهو مقر الدروس الهندسية لتلامذة السنة الثالثة بمدرسة التجهيزية

---

تأليف

حضرة احمد بك عظيم

ناظر مدرسة دار العلوم وقلم الترجمة

---

(تنبيه)

وان كآذ كرنا في خطبة الكتاب في الجزء الاول ان الزيادات تميز عن الاصل بكتابتها بحروف دقيقة  
غير ان مقتضيات الاحوال اوجبت تمييزها بوضع نجوم قبلها في أوائل السطور فليتبه

---

(الطبعة الاولى)

بالمطبعة الكبرى الاميرية يولاق مصر المحمية

سنة ١٣٠٥ هجرية





بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## المجزء الثالث

في المستوى والزوايا المجسمة والكرة وكثيرات السطوح

### الباب الاول

في المستوى والزوايا المجسمة

### الفصل الاول

في المستوى وتعينه

(٢٠٢) المستوى هو ما تقدم (٩) سطح غير محدود ينطبق عليه المستقيم كالانطباق في جميع جهاته

(٢٠٣) ويتعين وضعه

أولاً - بكل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة لانه تقدم في (ثمرة ١١) ان مثل هذه النقط الثلاث لا يمكن أن يجر بها الامستو واحد

فعلى هذا كل مستقيمين متقاطعين يتعين بهما وضع مستو وكذا يتعين بكل مستقيم ونقطة خارجة عنه وان أى جزم من مستويين ان ينطبق على أى جزم آخر منها ومن مستو آخر

ثانيا - بكل مستقيمين متوازيين لانه يؤخذ من تعريفهما وجودهما في مستوى واحد وغير ذلك حيث ان هذا المستوى يشتمل طبعاً على احدهما وعلى نقطة من الثاني فلا يمكن أن يمر بهما غيره ومما ذكر نستنتج النتائج الآتية

الاولى - كل مستقيمين غير موحدين في مستوى واحد أي لو مررنا مستويًا باحدهما وكان قاطعاً للثاني فلا يقال لهما متوازيان ولا متقاطعان ومن هنا يعلم ان من أي نقطة فراغية لا يمكن تحرير الامستقيم واحدوازي آخر معلوماً

الثانية - لا يمكن أن يكون تقاطع أي مستويين الامستقيما لانه ان لم يكن كذلك لوجدنا لاقطع على خط تقاطعهما ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة واذن في هذا معاً وبصير ان مستويًا واحدًا وهو مغاير للعرض

الثالثة - يمكن أن يتصور تولد المستوى اما من حركة مستقيم مار بنقطة معلومة ومتحرك على مستقيم معلوم واما من حركة مستقيم بالتوازي لنفسه متحرك على آخر معلوم

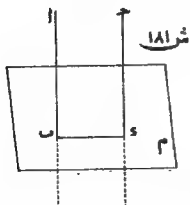
## الفصل الثاني

### في المستقيمان والمستويان المتوازيان

(٢٠٤) المستقيم والمستوى المتوازيان أو المستويان المتوازيان هما اللذان مهما امتدا لا يلتقيان أصلاً

## دعوى نظرية

(٢٠٥) المستوى القاطع لاحد مستقيمين متوازيين يكون قاطعاً للثاني والموازي للاحدهما يكون موازياً للثاني (شكل ١٨١)

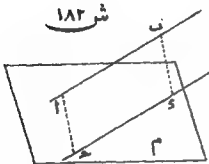


أولاً - اذا كان المستوى م قاطعاً لاحد المستقيمين المتوازيين ا ب مثلاً في نقطة ب يكون قاطعاً للثاني م والوصول الى ذلك يكفي البرهنة على ان المستوى م لا يجتوي على المستقيم م ولا يوازيه فاذا اجتوى المستوى م المستقيم م في حيثانه يجتوي زيادة على ذلك على نقطة ب من المستقيم ا ب

فيكون مستقلا عليهما معا (٢٠٣ ثانيا) وبذلك يكون هونفس مستوى المستقيمين المتوازيين وهو مغاير للعرض واذن فلا يكون المستوى م مستقلا على المستقيم  
ثم يقال حيث ان مستوى المستقيمين المتوازيين يجب أن يقطع المستوى م في مستقيم (٢٠٣ نتيجة) غير نقطة ب وانه لو امتد هذا المستقيم الموجود في كلا المستويين فانه يقابل المستقيم م في نقطة د احدي نقط المستوى م فاذن لا يكون المستوى م موازيا للمستقيم م د بل قاطعه

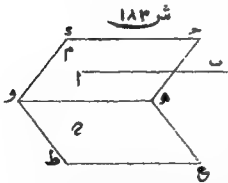
ثانيا - كل مستوئ م يكون موازيا اب مثلا فانه يكون موازيا للثاني م د لانه ان لم يكن كذلك لكان قاطعه واذن فيقطع المستقيم اب (أولا)

وهو مغاير للعرض



نتيجة ١ - (شكل ١٨٢) اذا ملئ نقطة م احدي نقط المستوى م الموازي للمستقيم اب المستقيم م موازي للمستقيم اب فيكون موجودا بتمامه في المستوى م لانه ان لم يكن كذلك لقطع المستوى م المستقيم اب (أولا) وهو محال

نتيجة ٢ - اذا وازي المستويان م و د المستقيم اب (شكل ١٨٣) فالخط تقاطعهما هو يكون موازيا اب لانه لو ملئ نقطة ه احدي



نقط خط التقاطع مستقيم وازي اب فان هذا المستقيم يجب أن يكون موجودا في كلا المستويين م و د كما ذكر بالنتيجة السابقة واذن فيكون هو خط تقاطعهما

نتيجة ٣ - اذا كان المستقيم م موازيا للمستوى م ومررت به مستويا آخر م قاطعا للمستوى م فان خط تقاطعهما يكون موازيا للمستقيم م (شكل ١٨٣)

لان المستقيم المار بنقطة ه احدي نقط خط تقاطع المستويين وموازيا للمستقيم م يجب أولًا ان يكون موجودا في المستوى م (نتيجة ١) وثانيا يجب ان يكون في المستوى م لانه يحتوي على أحد المستقيمين المتوازيين وعلى نقطة من الثاني

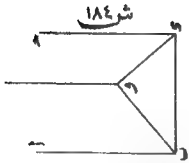
نتيجة ٤ - (شكل ١٨٣) المستويان م و د الماران بالمستقيمين م د ح ط المتوازيين يتقاطعان في مستقيم ه و مواز لكل واحد من المستقيمين المذكورين

لأن المستقيم المار بنقطة هـ إحدى نقط خط تقاطع المستويين بالتوازي لكل واحد من المستقيمين د و ع ط يجب أن يكون موجوداً في كلا المستويين واذن يكون هو خط تقاطعهما

نتيجة ٥ - (شكل ١٨٢) كل مستقيم مثل أ ب يوازي آخر د و موجوداً بمطاميه في مستوى م يكون موازياً لهذا المستوى  
لأنه إذا قطع المستوى م المستقيم أ ب فإنه يقطع الموازي له د و ولا يكون إذن موجوداً بمطاميه في المستوى وهو مغاير للفرض

### دعوى نظرية

(٢٠٦) المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث متوازيان (شكل ١٨٤)



لفرض أن المستقيمين أ ب و د موازيان للمستقيم هـ و

أولاً - لا يمكن أن يتقاطع المستقيمان أ ب و د

لأنه لو حصل ذلك لأمكن من نقطة فراعية مده مستقيمين

موازيين لثالث وهو محال (٢٠٣ نتيجة ١)

ثانياً - أن المستقيمين المذكورين موجودان في مستوى

واحد لأنه إذا قطع المستوى ع مثلاً المار بالمستقيم أ ب

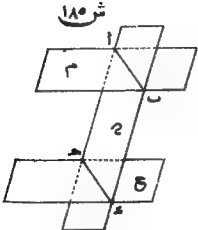
وينقطع د المستقيم د فإنه يقطع ضرورة الموازي له هـ و واذن فيقطع أيضاً المستقيم

أ ب الموازي هـ و وبما عليه فلا يكون مشغلاً عليه وهو مغاير للفرض

### دعوى نظرية

(٢٠٧) خط تقاطع مستويين متوازيين مستقيمان

متوازيان (شكل ١٨٥)



ليكن المستوى د قاطعاً للمستويين المتوازيين م و ع

فالمستقيمان أ ب و د الموجودان في المستوى د

لا يمكن أن يتلاقيا لوجودهما أيضاً في مستويين متوازيين

واذن فهما متوازيان

نتيجة - المستقيمان المتوازيان المحصورين بمستويين

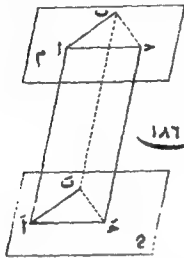
متوازيين هي متساوية



فالمستقيمان  $a$  و  $b$  المتوازيان المحصوران بين المستويين  $m$  و  $n$  المتوازيين متساويان  
لأن الممر بينهما المستوي  $d$  فإنه يقطع المستويين المتوازيين  $m$  و  $n$  في المستقيمين المتوازيين  
 $ab$  و  $cd$  واذن فيكون الشكل  $abcd$  متوازي أضلاع ويكون فيه  $a = b = c = d$   
وهو المطلوب

## د دعوى نظرية

(٢٠٨) كل نقطة مفروضة يمكن أن يمر بها مستوا واحد مواز لمستوي معلوم (شكل ١٨٦)



لتكن  $a$  النقطة المفروضة خارج المستوى  $d$   
أولاً - يمد من نقطة  $a$  مستقيماً  $ab$  و  $a$  موازياً  
بالتناظر للمستقيمين  $ab$  و  $cd$  الكائنين في المستوى  
المعلوم فيكونان موازيين لهذا المستوى (٢٠٥ نتيجة ٥)  
ويكون مستويهما  $ab$  و  $cd$  موازياً للمستوى  $ab$   
لأنه ان لم يكن كذلك لقاطبه في مستقيم وازى كل واحد من  
المستقيمين المتقاطعين  $ab$  و  $a$  (٢٠٥ نتيجة ٤)  
وهو محال

ثانياً - لو فرض تمرير مستوا آخر من نقطة  $a$  مواز للمستوى  $ab$  خلاف المستوى  
 $ab$  فانا تصور من نقطة  $a$  تمرير مستو قاطع للمستويات الثلاثة فيقطع المستويين المارين  
بنقطة  $a$  في مستقيمين مارين منها موازيين للمستقيم الذي يتقاطع فيه المستوى القاطع  
بالمستوى المعلوم (٢٠٥ نتيجة ٢) وهو محال

نتيجة ١ - المحل الجامع للمستقيمات المارة من نقطة واحدة بالتوازي لمستوى معلوم هو مستو  
مواز للمستوى المذكور

وذلك لان اثنين منها يتعين بهما مستو مواز للمستوى المعلوم وحيث انه لا يمكن أن يمر بالنقطة  
المفروضة الا مستوا واحد وازى المستوى المذكور فتكون جميع هذه المستقيمات موجودة  
في مستو واحد وازى المستوى المعلوم

نتيجة ٢ - اذا قطع مستواً مستويين متوازيين فإنه لابد أن يقطع الثاني

نتيجة ٣ - اذا قطع مستقيم احده مستويين متوازيين فإنه لابد أن يقطع الثاني

لأن اذا مررنا بهذا المستقيم مستويًا فإنه يقطع المستويين المتوازيين في مستقيمين متوازيين

وحيث ان المستقيم المعلوم يقطع احدهذين المستقيمين المتوازيين فانه يقطع الثاني واذن يقطع المستوى المشكل على هذا المستقيم  
نتيجة ٤ - المستقيم أو المستوى الموازي لاحد مستويين متوازيين يكون موازيا للثاني لانه اذا قطعناه يقطع الثاني وبناء عليه فالمستويان الموازيان لثالث متوازيان

## دعوى نظرية

(٢٠٩) الزاويتان الغير الموجدتين في مستوي واحد التان أضلاعهما المتناظرة متوازيتان ومقابلة في اتجاه واحد تكونان متساويتين ويكون متساويهما متوازيين (شكل ١٨٦)  
ليكن  $AB$  يوازي  $AB'$  ومتحداهما في الجهة  $AC$  يوازي  $AC'$  ومتحداهما أيضا معهما في الجهة فتأخذ  $AB = AC'$  و  $AC = AB'$  ثم نصل  $BC$  و  $BC'$  و  $AA'$  و  $BB'$  و  $CC'$  فالشكل  $ABC$  يكون متوازي الاضلاع لان فيه الضلعين المتقابلين  $AB$  و  $AC'$  متوازيان ومتساويان وحيث يكون الضلعان  $AA'$  و  $BB'$  متوازيين ومتساويين أيضا وبمثل ذلك يبرهن على أن  $CC'$  و  $AA'$  متوازيان ومتساويان واذن يكون  $BB'$  و  $CC'$  متوازيين ومتساويين ويكون الشكل  $BB'C'C$  متوازي الاضلاع ويكون فيه  $BC = B'C'$  و  $BC' = B'C$  و  $BB' = CC'$  و  $BC = B'C'$  و  $BC' = B'C$  متساويان لتساوي الاضلاع الثلاثة المتناظرة فهما وينتج من تساويهما أن الزاوية  $BAC = B'A'C'$  الزاوية  $BAC'$

وأما توازي مستوييهما فهو ناتج من النظرية المتقدمة (٢٠٨)

تنبيه - اذا اختلف ضلعان زاوية  $A$  في الجهة مع ضلعي زاوية  $A'$  مع بقا التوازي بينهما فان الزاوية التي تحدث بين مثل هذين الضلعين تكون مساوية لزاوية  $A$  أو مساوية لزاوية  $A'$  وأما اذا اتحد ضلعان من أضلاع الزاويتين المذكورتين في الجهة واختلف الضلعان الآخران فيها فان الزاوية التي تحدث بين مثل هذين الضلعين تكون مكمل لزاوية  $A$  أو لزاوية  $A'$

نتيجة - اذا فرض مستقيمان  $A$  و  $B$  موضوعان بطريقة تنافي الفراغ فانه يطلق على الزاوية الحادثة بين المستقيمين المارين من أي نقطة بالتوازي للمستقيمين المقروطين اسم زاوية المستقيمين القراعيتين

ولاجل أن يكون هذا التعريف عاما يجب أن يبرهن على أن هذه الزاوية غير متغيرة بوضع النقطة التي اختيرت لتلد المستقيمين المتوازيين وهذا أمر ينتج من النظرية المتقدمة

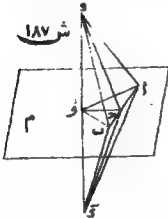
## الفصل الثالث

في المستقيمات والمستويات المتعامدة

### دعوى نظرية

(٢١٠) كل مستقيم عمودي على مستقيمين من مستوي يكون عمودا على أي مستقيم من المستوى المذكور (شكل ١٨٧)

وهذه الدعوى على ثلاثة أحوال



الحالة الأولى - ان يكون المستقيم د و عمودا على المستقيمين أ و ب المارين من موقعه في المستوى (موقع العمود على المستوى هو نقطة تقاطعه) ويطلب البرهنة على انه عمود على أي مستقيم مثل و ح مار من موقعه في المستوى المذكور

وذلك بعمود العمود د و تحت المستوى بمقدار د و ثم تقطع المستقيمتين الثلاثة أ و ب و د و بالمستقيم ح و ونوصل النقطتان د و ب بكل واحد من النقطتين أ و ب و ح فالمستقيمان أ د و ب متساويان لوجود نقطة أ على العمود أو المقام على منتصف د و ومثلهما المستقيمان ب د و ب و واذن فالمثلثان د أ ب و د ب ح متساويان لتساوي الاضلاع الثلاثة المتناظرة فيهما ثم اذا دور المثلث د ح أ حول الضلع أ ح فإنه يمكن وضع نقطة د على نقطة ب وحيث ان نقطة د ثابتة في أثناء الحركة فينطبق الضلع د ح على الضلع د ب ويساويه وحينئذ يكون المثلث د ح ب متساويا للسابق وحيث ان المستقيم ح و واصل من رأسه الى منتصف قاعدته فيكون عمودا عليها (٢٩ ثالثا)

الحالة الثانية - ان يكون المستقيم د و عمودا على المستقيمين أ و ب المارين من موقعه في المستوى ويطلب البرهنة على انه عمود على أي مستقيم مثل ب ح من المستوى المذكور

والبرهنة على ذلك يقال اذا مد من نقطة و مستقيما وازى ب ح فيكون موجودا في المستوى م و عمودا على د و (الحالة الأولى) واذن فيكون د و عمودا على ب ح (٢٠٩ نتيجة)

الحالة الثالثة - ان يكون المستقيم د و عمودا على مستقيمين أيا كانا في المستوى ويطلب البرهنة على انه عمود على أي مستقيم من المستوى

(٢) التحفة البهية (ثالث)

وذلك لانه اذا رسم من نقطة و موقع العمود المستقيم  $OA$  و  $OB$  موازيان بالنظر للمستقيمين المقروض تعامدهما على المستقيم  $OC$  فتكون كل واحدة من الزاويتين  $AOB$  و  $BOC$  قائمة (٢٠٩) وان فيكون  $OC$  عمودا على أى مستقيم  $OM$  سوم في المستوى (الحالة الاولى والثانية)

تبينه - المستقيم العمودي على مستو هو ما كان عمودا على كل مستقيم يرسم في المستوى  
ويشاهد مما سبق البرهنة عليه في النظرية المتقدمة انه يكفي ان يكون مستقيم عمودا على مستو  
ان يكون عمودا على مستقيمين من سو من في المستوى

نتيجة - اذا كان مستقيم عمودا على مستوى مستقيمين ١ و ٢ موازيين لمستوا آخر يكون عمودا على المستوى المذكور لانه اذا مد من نقطة ما من المستوى الاخير مستقيمان موازيان للمستقيمين ١ و ٢ فيكونان موحودين فيه (٢٠٥ نتيجة ١) وعمودين على المستقيم الاصل واذا فيكون هذا المستقيم عمودا على كل مستقيم مرسوم في المستوى وبناء عليه يكون عمودا على المستوى

## د دعوی نظام

(٢١١) كل نقطة مفروضة لا يمكن أن يدهمها الاستقيم واحد عودي على مستو معلوم  
(شكل ١٨٨)

وهذه الدعوى على حالتين

### الحالة الاولى - أن تكون النقطة المفروضة خارج

المستوى المعلوم وليتكن هـ في رسم الخاك مستقيم ما

أ ب في المستوى ثم يتصور غمر بمستوي المستقيم المذكور

وبنقطة هـ (٢٠٣ أولاً) وفي هذا المستوى ينزل من

نقطة هـ العمود هـ ا على المستقيم أ ب ثم يقام من

نقطة ١ الموجودة في المستوى م العمود أ و على أ ب ثم تصور عمير مستويين المستقيمين

أهـ ، ١٠ المقاطعين (٢٠٣ أولاً) وفيه يمكن أنزال من نقطة هـ العمود هـ و على

١٠ فيكون عمودا على المستوى م

لان المستقيم ان عمود على المستقيمين او و اه الموجودين في المستوى او ه فيكون

عمودا على وه واذن يكون هو عمودا على المستقيمين او ، اب الموجودين في المستوى م

فيكون عمودا عليه وبذلك يشاهد إمكان انزال من نقطة ه العمود هو على المستوى م  
ثم اذا قيل بإمكان انزال عمود آخر منها هـ على المستوى المذكور كان المثلث الحادث هو ب  
فيه زاويتان قائمتان وهو محال أو أنه أمكن من نقطة هـ في مستوى هـ ب انزال عمودي  
هو و هـ على المستقيم ب وهو محال

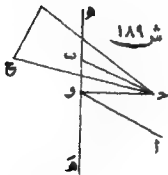
الحالة الثانية - أن تكون النقطة المفروضة كائنة على المستوى م وتكن و فيرسم لذلك  
مستقيما أب في المستوى وينزل من نقطة و العمود ب على هذا المستقيم ثم تصور تقرير  
مستويا بالمستقيم أب غير المستوى م وفي هذا المستوى يمكن إقامة العمود اهـ على أب  
ثم يقام من نقطة و في مستوى المستقيمين ار و اهـ العمود وهـ على المستقيم وا  
فيكون عمودا على المستوى م (والبرهنة على ذلك مثل المتقدمة)

ثم اذا قيل بإمكان إقامة عمود آخر و د على المستوى م فان مستوى هذين العمودين يقطع  
المستوى م في المستقيم و د واذن فقد أمكن إقامة العمودين وهـ و د على و د  
في المستوى هو د وهو محال

## دعوى نظرية

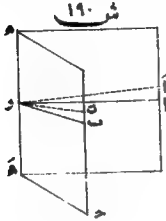
(٢١٢) كل نقطة مفروضة لا يمكن أن يمر بها الامستوى واحد عمودي على مستقيم معلوم وهذه  
الدعوى على حالتين

الحالة الاولى (شكل ١٨٩) - أن تكون النقطة المفروضة خارج المستقيم والمعلوم وتكن ح  
فيتصور بالمستقيم هـ هـ وب نقطة ح مستويين في هـ من  
نقطة ح العمود ح و على هـ هـ ثم يتصور أيضا تقرير مستوي  
آخر كصفه اتفق بالمستقيم هـ هـ وفيه يقام من نقطة و العمود  
وا على هـ هـ فيكون مستوى المستقيمين ح و و ا  
عمودا على هـ هـ (٢١٠)



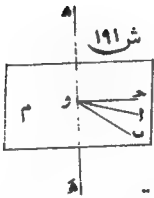
ثم اذا قيل بإمكان تقرير مستوي آخر من نقطة ح عمودا على هـ هـ  
وقال في نقطة ب كان المثلث الحادث ح ب و فيه زاويتان  
قائمتان وهو محال وان قيل بإمكان تقرير مستوي آخر بالمستقيم ح و عمودا على هـ هـ فان المستوى  
هـ هـ ا يقطع هذين المستويين في مستقيمين عمودين على هـ هـ وهو محال

الحالة الثانية (شكل ١٩٠) - أن تكون النقطة المفروضة و على المستقيم هه فيمرر لذلك بالمستقيم هه مستويان ويقام فيهما على العمودان و ا و ب فيكون مستوي هذين العمودين عموداً على هه



ثم اذا قيل بإمكان تمرر مستوي آخر عمودى على هه و ما ر نقطة و فان أجده المستويين هه ا و هه ب يقطع المستويين العمودين على هه في مستقيمين ب و و ب و عمودين على هه وهو محال

نتيجة - المحل الجامع لجميع الاعمدة المقامة على المستقيم هه من نقطة و في الفراغ هو المستوي العمودى على هه المار بنقطة و (شكل ١٩١)



وذلك لان اثنين منا يتعين بهما وضع المستوي م العمودى على هه و المار بنقطة و ولما كان لا يمكن أن يمر بنقطة و الامستوي واحد عمودى على هه فتكون جميع الاعمدة موجودة في هذا المستوي

### دعوى نظرية

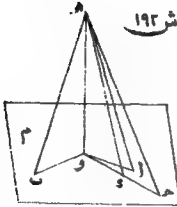
(٢١٣) اذا أنزل من نقطة خارج مستوي عمود عليه وأنزل من موقعه عمود على مستقيم كائن فيه ووصلت نقطة تقابلها ما باحدى نقط المستقيم العمودى على المستوي كان هذا المستقيم عموداً على المستقيم الكائن في المستوي (وتسمى هذه النظرية بنظرية الاعمدة الثلاثة شكل ١٨٨) ليكن هو عموداً على المستوي م و ا عموداً على ا ب فانه ينتج من القروض أن ا ب عمود على المستقيمين او و وه من المستوي هه او (٢١٠ تنبيه) فيكون عموداً عليه واذن فيكون عموداً على اه وهو المراد

### دعوى نظرية

(٢١٤) اذا أنزل من نقطة خارج مستوي مستقيم عمود عليه ووجه مواثل فانه يحدث أولاً - أن العمود أقصر من كل مائل

ثانيا - المائلان اللذان افترا يعدين متساويين عن موقع العمود متساويان  
ثالثا - المائلان اللذان افترا عان موقع العمود يعدين مختلفين أبعدهما أطول

رابعا - عكس جميع ما تقدم صحيح (شكل ١٩٢)



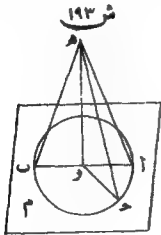
ش ١٩٢

ليكن هو عمود على المستوى م، هـ أ، هـ ب، هـ ج  
مواثل و أ = ب

برهان الاول - حيث كان هو في المستوى هو أ  
عمود على و أ كان هـ أ مائلا عليه ويكون هو > هـ أ  
برهان الثاني - حيث ان المثلثين هو أ و هـ ب  
فيهما زاوية قاعمة محاطة باضلاع متساوية فيهما النظر  
لنظيره فيكونان متساويين ويكون هـ أ = هـ ب

برهان الثالث - يؤخذ من و أ البعد و = و أ في المستوى هو و المائل هو < هو  
وحيث كان هـ أ = هـ أ يكون هـ ج < هـ أ

برهان الرابع - يبرهن على عكس النظريات المتقدمة بواسطة ترجيع الامر الى الاستحالة  
فقال مثلا اذا كان هو أصغر من أي مستقيم مثل هـ أ عمود من نقطة هـ الى المستوى م  
فيكون عمودا عليه لانه ان لم يكن كذلك لكان مائلا عليه وبذلك لا يكون أصغرا لأبعاد المحصورة  
بين نقطة هـ والمستوى وهو خلاف وهكذا



ش ١٩٣

تنبيه - العمود النازل من أي نقطة على مستوى يسمى بعد  
النقطة عن المستوى

نتيجة - المحل الجامع لمواقع المواثل المتساوية المملودة  
من نقطة قراغية الى مستواه محيط دائرة مركزه موقع  
العمود على المستوى المذكور (شكل ١٩٣) لانه حيث  
كانت جميع هذه المواثل متساوية فتكون أبعادها عن  
موقع العمود كذلك (الرابع)

## دعوى نظرية

(٢١٥) المستوى العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودا على الثاني وللبهنة على  
ذلك يقال من المعلوم أن المستقيمين المتوازيين يصنعان زاويتين متساويتين مع أي مستقيمين

متوازيين ممدودين من نقطتي تقابلهما بالمستوى (٢٠٨) فإذا كان أحدهما عمودا على جميع مستقيمان المستوى فيكون الثاني كذلك أعني يكون عمودا على المستوى  
نتيجة - عكس هذه النظرية صحيح أعني أن المستقيمين العمودين على مستوى يكونان متوازيين  
لأنه ان لم يكونا كذلك لتلاقي في نقطة وإن فقد أمكن منها انزال عمودين على المستوى وهو محال

### دعوى نظرية

(٢١٦) المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودا على الثاني (شكل ١٩٤)

ليكونا م و د المستويين العلويين و أ ب المستقيم  
المعالم العمودي على المستوى م وللبينة على ذلك يقال

أولا - المستقيم أ ب لا بد أن يقابل المستوى د  
الثاني (٢٠٨ نتيجة ٢)

ثانيا - يمرر بالمستقيم أ ب مستويا يقطع المستويين  
المتوازيين في المستقيمين المتوازيين أ ح و ب د وحيث  
كان أ ب عمودا على أحدهما فيكون عمودا على الثاني

ب د وبإعادة هذا العمل بواسطة قرير مستويان ثالث وهكذا بالمستقيم أ ب فانها ثبت  
النظرية

نتيجة - عكس هذه النظرية صحيح أعني أن المستويين العمودين على مستقيم متوازيان لأنه  
ان لم يكونا كذلك لتقاطعا في مستقيم وحيث فقد أمكن من إحدى نقط خط التقاطع قرير  
مستويين عمودين على مستقيم وهو محال

## الفصل الرابع

في مسقط النقطة والمستقيم

### تعريفان

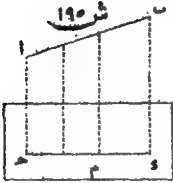
(٢١٧) مسقط أى نقطة على مستو هو موقع العمود النازل من هذه النقطة على هذا المستوى

(٢١٨) ومسقط مستقيم على مستو هو المحل الجامع لمساقط نقط المستقيم على المستوى



## دعوى نظرية

(٢١٩) مسقط المستقيم على المستوى هو خط مستقيم (شكل ١٩٥)

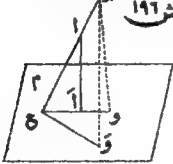


لتكن  $\alpha$  مسقط نقطة  $A$  على المستوى  $\pi$  فنمرر بالمستقيمين  $\alpha$  و  $\alpha'$  مستويا يقطع المستوى  $\pi$  في المستقيم  $\alpha''$  فإذا أريد الآن إسقاط نقطة  $B$  فأنزل منها العمود  $\beta$  على المستوى فيكون موازيا  $\alpha''$  (نتيجة) وبناء عليه يكون موجودا بتامه في المستوى  $\beta$   $\alpha''$  (٢٠٣) ويكون موقعه  $\beta$  موجودا على المستقيم  $\alpha''$

وحينئذ يكون المحل الجامع لمساقط جميع نقط المستقيم  $\alpha$  هو مستقيم آخر  $\alpha'$  نتيجة - يكفي لإيجاد مسقط مستقيم على مستوى أن يجمع بين مسقطي نقطتين من نقطه بمستقيم

## دعوى نظرية

(٢٢٠) الزاوية الحادة الحادثة من أي مستقيم ومسقطه على مستوي أصغر جميع الزوايا الحادة الحادثة من المستقيم المذكور وأي مستقيم مدمن موقعه في المستوى (شكل ١٩٦)



ليكن  $\alpha$  المستقيم المعلوم و  $\alpha'$  مسقطه على المستوى  $\pi$  و  $\alpha''$  مستقيما آخر عمودا في المستوى من الموقع  $\alpha'$

فإذا أخذ  $\alpha'$  و  $\alpha''$  ووصل  $\alpha'$  فالتثلثان  $\alpha'$  و  $\alpha''$  و  $\alpha'$  فيهما  $\alpha'$  مشترك بينهما والضلع  $\alpha'$  و  $\alpha''$  و  $\alpha'$  ولكنه حيث كان الضلع  $\alpha'$  هو أصغر من  $\alpha'$  تكون زاوية  $\alpha'$  و  $\alpha''$  أصغر من زاوية  $\alpha'$  وهو المطلوب

نتيجه - الزاوية الحادة  $\alpha'$  و  $\alpha''$  الحادثة من المستقيم  $\alpha$  و مسقطه  $\alpha'$  على المستوى  $\pi$  تسمى ميل المستقيم على المستوى أو بزاوية المستقيم والمستوى نتيجة - الزاوية المنفرجة التي يصنعها المستقيم مع امتداد مسقطه هي بناء على ما تقدم أكبر جميع الزوايا التي يمكن حدوثها بين المستقيم المذكور وأي مستقيم مدمن موقعه في المستوى

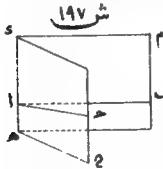
## الفصل الخامس

### في الزوايا الزوجية

#### تعريف

(٢٢١) الزاوية الزوجية هي الشكل المتكون من مستويين متقاطعين يسميان وجهها الزاوية وخط تقاطعهما يسمى حرف الزاوية

وتقرأ الزاوية الزوجية بالحرفين الهجائيين المسمى بهما نقطتان من حرفها اذا كانت منفردة مثل زاوية ده (شكل ١٩٧) وأما اذا اشتركت في الحرف ده مع زوايا أخرى فتقرأ بالاحرف الاربعة م و ده بشرط أن يكون الحرفان المسمى بهما حرفها في الوسط

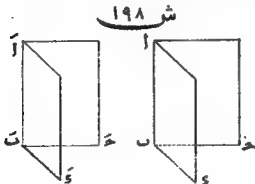


(٢٢٢) اذا اخذت نقطة مثل ا على حرف الزاوية واقم منها العمودان اب و اح على ده كل واحد منهما في وجه من وجهي الزاوية فان مقدار الزاوية ب اح الواقعة بين هذين العمودين ثابت دائماً مهما كان وضع نقطة ا على الحرف

ولهذا نسمى هذه الزاوية بزاوية العمودين أو بالزاوية المستوية للزاوية الزوجية وهي التي يقدر بهاميل أحد المستويين على الآخر

(٢٢٣) الزاويتان الزوجيتان المتساويتان هما اللتان ينطبق أوجههما على بعضهما مجرد انطباق حرفيها

تنبيه - اذا طبقنا الزاوية الزوجية أ ب (شكل ١٩٨) على مساويتها اب و وقعت نقطة ب على نقطة ب فان زاوية العمودين ح د للزوجية أ ب تنطبق ضرورة



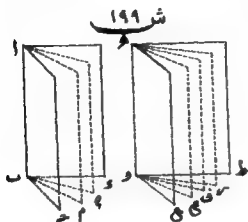
على زاوية العمودين ح د للزوجية اب وأما اذا كانت زاوية العمودين ح د مساوية لنظيرتها ح د ووضعنا احداهما على الاخرى فان الحرف أ ب ينطبق ضرورة على الحرف اب وبذلك ينطبق وجهها الزاوية الاولى على وجهي الزاوية الثانية فيساويان وبناء على ذلك

يقال

أولاً - يتساوى الزاويتان الزوجيتان إذا تساوى زاويتاهما المستويتان  
ثانياً - يتساوى الزاويتان المستويتان إذا تساوى زاويتاهما الزوجيتان

### دعوى نظرية

(٢٢٤) النسبة بين الزاويتين الزوجيتين هي على أي حالة كانت كالنسبة بين زاويتيهم  
المستويتين (شكل ١٩٩)



لنفرض أولاً أن بين الزوجيتين مقياساً مشتركاً  
أي زاوية زوجية منحصرة فيهما من زاوية زوجية  
التي تكونت ثلاث مرات في أحدهما وأربعة في  
الثانية فتكون النسبة بين الزوجيتين كالنسبة بين  
هذين العددين الصحيحين أعني يكون

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \text{ حوط}}{4 \text{ حوط}}$$

فإذا مرنا بكل واحد من النقطتين ب و و مستويًا عمودياً على الحرف المقابل لهما فإن هذين  
المستويين يقطعان جميع الأوجه في مستقيمت عمودية على الحرفين أ ب و و هـ وبذلك  
تكون الزوايا ح ب م و م د و د و ع و ع و و الخ هي الزوايا المستوية  
المقابلة للزوايا الزوجية الصغيرة وحيث كانت متساوية فتكون المستوية كذلك (٢٢٣ تنبيه)  
ويشاهد انقسام زاوية ح د إلى ثلاث زوايا متساوية وزاوية ح و ط إلى أربع زوايا  
متساوية فتكون النسبة بين الزاويتين ح د و ح و ط كالنسبة بين العددين الصحيحين  
٣ و ٤ ويحدث

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \text{ حوط}}{4 \text{ حوط}}$$

وعقارفة هذا التاسب بالسابق ينتج

$$\frac{3 \text{ حوط}}{4 \text{ حوط}} = \frac{3 \text{ حوط}}{4 \text{ حوط}}$$

وأما إذا لم يوجد بين الزاويتين الزوجيتين مقياس مشترك فانه يبرهن على هذه النظرية بعين  
الطريقة التي اتبعت بفترة (٨٠ جزء أول)

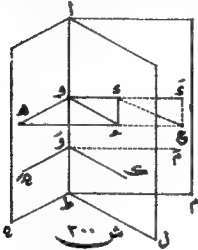
نتيجة - ينتج مما ذكر أن الزاوية المستوية أو زاوية العمودين يمكن اعتبارها مقياساً للزاوية  
الزوجية لأن المقدار الذي ينجم بمقاس الزوجية هو عين الذي ينجم بمقاس المستوية عند مقارنة

(٣) التحفة البهية (ثالث)

كل منهما بالوحدة التي من نوعها بشرط أن تكون وحدة الزوايا المستوية هي زاوية العمودين  
لوحدة الزوايا الزوجية

## دعوى نظرية

(٢٢٥) كل نقطة من نقط المستوى المنصف لزاوية زوجية على بعدين متساويين من وجهيها  
وبالعكس كل نقطة توجد على بعدين متساويين من وجهي زاوية زوجية تكون إحدى نقط  
المستوى المنصف لها شكل (٢٠٠)



من المعلوم أن المستوى المنصف لزاوية زوجية هو  
مستو مار بجرفها وقاسمها إلى زاويتين زوجيتين  
متساويتين

أولاً - إذا فرضت نقطة  $\delta$  على المستوى  $\alpha$   
المنصف للزاوية الزوجية  $\alpha$  ط  $\delta$  وكان  
بعدها عن وجهيها  $\alpha$  م  $\delta$  و  $\beta$   $\delta$   $\gamma$   
يقال

حيث كان  $\delta$  عموداً على المستوى  $\alpha$  فيكون عموداً على المستقيم  $\alpha$  (٢١٠) وكذا حيث  
كان  $\delta$  عموداً على المستوى  $\beta$  فيكون عموداً أيضاً على  $\alpha$  وحينئذ يكون هذا المستقيم  
 $\alpha$  عموداً على المستوى  $\delta$  و  $\beta$  (٢١٠) وتكون إذن زاوية  $\delta$  و  $\beta$  مقاس الزاوية  
الزوجية  $\alpha$  أول وزاوية  $\delta$  و  $\beta$  مقاس الزاوية الزوجية  $\alpha$  و حيث أن الزاويتين  
الزوجيتين متساويتان فرضاً تكون المستويتان كذلك ويكون المثلثان القائمان الزاوية  $\delta$  و  $\beta$   
و  $\delta$  و  $\beta$  متساويين لتساوي فيهما وتر وزاوية من أحدهما نظير فيهما من الثاني وينتج من  
تساويهما أن  $\delta = \beta$

ثانياً - إذا كان البعدان  $\delta$  و  $\beta$  متساويين فإنه يمرر المستوى  $\delta$  أو فيكون المستقيم  
 $\delta$  و منصفاً لزاوية  $\delta$  و  $\beta$  و حيث أن الزاويتين المستويتين  $\delta$  و  $\beta$  و  $\beta$  و  $\delta$   
متساويتان يكون الزوجيتان كذلك وبذلك يكون المستوى  $\alpha$  منصفاً للزاوية الزوجية  
نتيجة - كل نقطة مثل  $\delta$  مأخوذة خارج المستوى المنصف هي على بعدين مختلفين من وجهي  
الزاوية الزوجية لأنه لو كان الأمر بخلاف ذلك لوجدت ضرورة على المستوى المنصف وهو  
بخلاف الفرض

المستوى المنصف لزاوية زوجية هو المحل الهندسي للنقط المتساوية البعد عن وجهيها

## الفصل السادس

### في المستويات المتعامدة

#### تعريف

(٢٢٦) المستوى العمودي على آخره وما يصنع معه زاويتين زوجيتين متجاورتين متساويتين يقال لكل واحدة منهما قائمة

#### دعوى نظرية

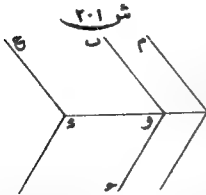
- (٢٢٧) كل مستقيم كائناً في مستوا لا يمكن أن يجزئه الامتداد واحد عمودى على الأول يبرهن على هذه النظرية بمثل ما سبقت البرهنة به على نظيرتها في الباب الأول من الجزء الأول نتيجة - يمكن أن يستعان بهذه النظرية على إثبات النظريات الآتية الأولى - إذا لاقى مستويان آخر فانه يصنع معه زاويتين زوجيتين متجاورتين مجموعهما يساوى زاويتين زوجيتين قائمتين الثانية - إذا كان مجموع الزوجيتين المتجاورتين مساوياً قائمتين يكون وجهاهما المتطرفان في استواء واحد الثالثة - إذا تقاطع مستويان فكل زاويتين زوجيتين متقابلتين بالحرف متساويتان الرابعة - المستويان المتصفان لزاويتين زوجيتين متجاورتين متعامدان

#### دعوى نظرية

- (٢٢٨) الزاوية الزوجية القائمة تكون زاويتها المتسوية كذلك والعكس أولاً - إذا كان المستوى م عموداً على المستوى ن وقطعناهما بمستو عمودى على خط تقاطعهما فانه يحدد عليهما زاويتين متساويتين وتكونان متجاورتين وحيث كان الزوجيتان متساويتين تكونان المتسويتان كذلك واذن تكون كل واحدة منهما قائمة ثانياً - إذا كانت الزاويتان المتسويتان قائمتين وحادثتين من مدمستو عمودى على خط تقاطع مستويين فانه يجب ان تكون الزوجيتان متساويتين واذن تكون كل واحدة منهما قائمة تنبيه - يكفي في البرهنة على تعامد مستويين ان يبرهن على ان الزاوية المتسوية للزاوية الزوجية الحادثة بينهما تكون قائمة

## دعوى نظرية

(٢٢٩) كل مستويع مستقيم عمودى على مستواً آخر يكون عموداً على هذا المستوى الأخير  
كافى (شكل ٢٠١)

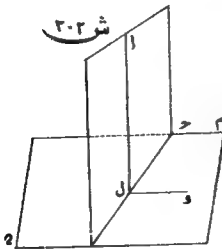


ليكن ب و عموداً على المستوى ح د والمستوى م د  
ماراً بالمستقيم ب و فإذا كان و ح عموداً على خط  
تقاطع المستويين أ د تكون زاوية ب و ح قائمة  
لان ب و عمود على المستوى ح د وحيث إنها  
الزاوية المستوية المنسوبة للزاوية الزوجية الواقعة بين  
المستويين فيكونان متعامدين وهو المراد (٢٢٨)

نتيجة - كل مستوٍ وازى المستقيم ب و يكون عموداً على المستوى ح د لانه اذا أخذت  
فيه نقطة و مد منها مستقيم وازى ب و فيكون موجوداً بقوله فيه (٢٠٥ نتيجة ٤) ويكون  
أيضاً عموداً عليه (٢١٥)

## دعوى نظرية

(٢٣٠) وبالعكس اذا تعامد مستويان فكل مستقيم مد فى احدهما عمودياً على خط تقاطعهما  
يكون عموداً على الثانى (شكل ٢٠٢)



ليكن المستويان م و ا متعامدين ومد المستقيم  
أ ل فى المستوى ا عمودياً على ح د فمد ل د  
عموداً على ح د فى المستوى م فتكون زاوية  
أ ل د هى الزاوية المستوية للزاوية الزوجية  
أ ب د وحيث كانت الزاوية الزوجية قائمة  
تكون المستوية كذلك ويكون أ ل عموداً على  
ل د وحيث كان عموداً على ح د فيكون اذن  
عموداً على المستوى م د

نتيجة ١ - اذا تعامد مستويان وأخذت نقطة على احدهما وأزلت منها عموداً على الثانى كان هذا  
العمود موجوداً بقوله فى المستوى الأول

لأنه ان لم يكن كذلك وانزل من النقطة المذكورة عمود على خط تقاطع المستويين فيكون عمودا على المستوى الثاني كما تقدم ذكره وحيث أنه لا يمكن من النقطة المذكورة الانزال عمودا واحد على المستوى فالعمودان يقعدان اذ وبصير ان واحدا وهو المطلوب

نتيجة ٢ - اذا تعامد مستويان فكل مستقيم مثل  $a$  عمود على احدهما  $m$  مثلا يكون موازيا للثاني والبرهنة على ذلك تؤخذ نقطة في المستوى  $\omega$  وينزل منها عمود على المستوى  $m$  فيكون موجودا بقوله في المستوى  $\omega$  (نتيجة ١) ويكون أيضا موازيا للمستقيم  $a$  وحيث ان المستقيم  $a$  مواز للمستقيم  $m$  في المستوى  $\omega$  فيكون موازيا له (٢٠٥ نتيجة ٥) وهو المراد

### دعوى نظرية

(٢٢١) المستويان العموديان على مستو ثالث يكون

خط تقاطعهما عموديا على المستوى الاخير (شكل ٢٠٣)

اذا كان  $ab$  خط تقاطع مستويين عموديين على المستوى  $m$  فاننا نأخذ نقطة  $a$  مثلا من خط

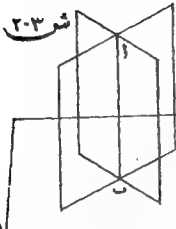
التقاطع وننزل منها عمودا على المستوى  $m$  فيكون

موجودا بقامه في كلا المستويين (٢٣٠ نتيجة ١)

وانه فيكون هو خط تقاطعهما

نتيجة - ويمكن التعبير عن منطوق هذه النظرية

بطريقة أخرى فيقال المستوى العمودي على مستويين متقاطعين يكون عموديا على خط تقاطعهما



### دعوى نظرية

(٢٢٢) باي مستقيم لا يمكن أن يمر الامستوا واحد فقط عمودي على آخر معلوم

أولا - تؤخذ نقطة على المستقيم المعلوم وينزل منها عمود على المستوى ثم يمر مستويين

المستقيمين فيكون عمودا على المستوى المعلوم لاشتماله على مستقيم عمودي عليه (٢٢٩)

ثانيا - من المعلوم ان كل مستوي يمر بالمستقيم المعلوم ويكون عمودا على المستوى المقروض لابد

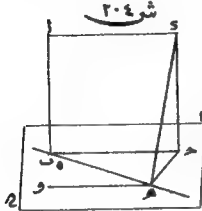
أن يحتوى على العمود المنزل من احدى نقط المستقيم على المستوى المذكور وحيث أنه لا يمكن ان

يمر بالمستقيمين المذكورين الامستوا واحد فقد ثبت المطلوب

تنبيه - ماذا كنا من البراهين يقتضى ان لا يتجد المستقيم المعادى للعمود المتزل من احدى نقطه على المستوى أى ان لا يكون المستقيم المقروض عمودا على المستوى المعادى  
نتيجة - وينتج من ذلك ان المستوى المسقط للمستقيم يكون عمودا على مستوى المسقط

## دعوى نظرية

(٢٢٣) كل مستقيمين غير موجودين في مستوا واحد يمكن دائما ان يدلما أولا وعمود مشترك بينهما وثانيا انه لا يمكن مدغيره وثالثا ان يكون هذا



العمود أصغر الأبعاد المحصورة بينهما (شكل ٢٠٤) ليكونا  $ا د$  و  $ب ه$  المستقيمين المعاديين الغير الموجودين في مستوا واحد فتؤخذ نقطة  $ه$  على  $ا د$  ويمد منها المستقيم  $ه و$  موازيا للثاني ثم يمر بالمستقيمين  $ا د$  و  $ب ه$  مستوي فيكون موازيا للمستقيم  $ا د$  (نتيجة ٢٠٥)

فاذا كان المستقيمان المقروضان في مستوا واحد كان هذا

المستوى مشتملا على  $ا د$  ضرورة ثم ينزل من نقطة  $ا$  احدى نقط المستقيم  $ا د$  العمود  $د ح$  على المستوى  $م$  ويمد من موقعه  $ح$  المستقيم  $ح ب$  موازيا لـ  $ا د$  فيكون موجودا بتمامه في المستوى  $م$  (نتيجة ٢٠٥) ويقابل  $ب ه$  لانه ان لم يقابله كان موازيا له ويترتب على ذلك موازاة المستقيمين  $ب ه$  و  $ا د$  وهو مخالف للقرض ثم يمد من نقطة التقابل  $ب$  المستقيم  $ب ا$  موازيا للمستقيم  $د ح$  اذا تقررهذا يقال

أولا - ان المستقيم  $ا ب$  عمود مشترك بين المستقيمين المقروضين لانه حيث كان المستقيم المذكور موازيا  $د ح$  العمودى على المستوى  $م$  فيكون عمودا عليه أيضا وبنا عليه يكون عمودا على المستقيمين  $ب ه$  و  $ب ح$  او  $ا د$  الموازى  $ب ح$

ثانيا - انه لا يمكن تمرير خلاف هذا العمود المشترك بينهما لانه لو قيل ان  $د ه$  عمود آخر مشترك بينهما فيكون ضرورة عمودا على  $ب ه$  و  $ه و$  الموازى  $ا د$  واذن يكون عمودا على المستوى  $م$  لكنه حيث كان  $د ح$  عمودا على المستوى  $م$  فقد أمكن انزال من نقطة  $ه$  عمودين على المستوى  $م$  وهو محال (٢١١)

ثالثا - ان هذا العمود المشترك هو أصغر الأبعاد المحصورة بين المستقيمين المقروضين وذلك لان



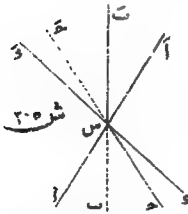
كل مستقيم محصور بينهما غيره مثل  $د ه$  أطول من العمود  $د ح$  المتزل من نقطة  $د$  على المستوى  $م$  وحيث كان  $د ه = ا ب$  يكون  $د ه < ا ب$

## الفصل السابع

### في الزوايا المجسمة

### تعريف

(٢٣٤) الزاوية المجسمة هي الشكل المتكوّن من جله مستويات متقاطعة منى ومجموعة في نقطة واحدة وتقاطعات المستويات يحدث عنها ما يسمى بالحرف المجسمة ونقطة اجتماعها هي رأسها والزوايا المستوية المتكوّنة بين الحرف تسمى أوجه المجسمة  
(٢٣٥) متى كان عدداً أوجه الزاوية المجسمة ثلاثة وهو أقل ما يمكن يقال لها زاوية مجسمة ثلاثية ولم نعتبر من الزوايا المجسمة الا المثلث منها أى الموضوع في جهة واحدة من امتداد أحد الأوجه  
(٢٣٦) اذا فرضت الزاوية المجسمة الرباعية مثلاً  $س ا ب د$  (شكل ٢٠٥)

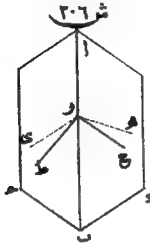


ومثلت الحرف  $س ا$  و  $س ب$  و  $س د$  و  $س ه$  جهة الرأس  $س$  فانه يتشكل من ذلك زاوية مجسمة رباعية أخرى  $س ا ب د$  يقال لها معاكلة للاولى أعني ان زوايا المجسمة الجذيدة زوجية كانت أو مستوية هي عين زوايا المجسمة الاولى لكنه لا يمكن انطباق احدهما على الاخرى لانه لو طبق الوجه  $د س ا$  على مساويه  $د س ا$  بحيث تكون أحرف المجسمتين في جهة واحدة من الوجه المشترك يشاهد ان الزوايا المستوية والزوجية من المجسمتين موضوعة على ترتيب معكوس

### قاعدة

(٢٣٧) اذا أقيم من نقطة و المأخوذة على حرف الزاوية الزوجية  $ا ب$  العمود  $و ح$  على الوجه  $ا ح$  بحيث يكون هو الوجه  $ا د$  في جهة واحدة بالنسبة للوجه  $ا ح$  ثم أقيم منها العمود  $و ط$  على الوجه  $ا د$  بحيث يكون هو الوجه  $ا ح$  في جهة واحدة بالنسبة للوجه  $ا د$  فان

الزاوية المستوية الحادثة ط و ح تكون مكمل للزاوية المستوية مقاس الزاوية الزوجية المعلقة (شكل ٢٠٦)

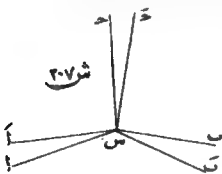


وللبرهنة على ذلك يمرر المستقيمين و ح و ط العمودين على ا ب مستوفيين ضرورة عمودا على ا ب ويقطع وجهي الزاوية الزوجية في المستقيمين و هـ و ي العمودين على الحرف ا ب وتكون الزاوية الحادثة مقاسا للزاوية الزوجية لكنه حيث كان و ح عمودا على الوجه ا ح تكون زاوية ي و ح مساوية قائمة وبعين هذا السبب تكون زاوية هـ و ط قائمة كذلك واذن يكون

$$ي و ح + هـ و ط = ط و ح + ي و هـ = ٢ ن وهو المطلوب$$

### دعوى نظرية

(٢٣٨) اذا اقيم من رأس زاوية مجسمة ثلاثية ثلاث اعمدة على اوجهما بحيث يكون كل واحد منها مع الحرف الثالث من المجسمة في جهة واحدة بالنسبة للوجه المقام هو عمودا عليه فان الزاوية المجسمة الثلاثية الحادثة من هذه الاعمدة تكون مكمل للزاوية المجسمة المفروضة (يعني التكامل هنا هو ان تكون الزوايا المستوية من ايمها مكمل للزاوية من الثانية) (شكل ٢٠٧)



فاذا اقيم العمود س ح على الوجه ا س ب وكان هو والحرف س ح في جهة واحدة بالنسبة للوجه ا س ب ثم اقيم العمود س ب على الوجه ا س ح وكان هو والحرف س ب في جهة واحدة بالنسبة للوجه ا س ح و اقيم العمود س ا على الوجه ب س ح وكان هو والحرف س ا في جهة واحدة بالنسبة للوجه ب س ح يقال

أولا - حيث كان س ح عمودا على الوجه ا س ب وهو الوجه ب س ح في جهة واحدة بالنسبة للوجه ا س ب وكان أيضا س ا عمودا على الوجه ب س ح وهو الوجه ا س ح في جهة واحدة بالنسبة للوجه ب س ح تكون زاوية ح س ا مكمل للزاوية المستوية التي تقاس بها الزوجية س ب (٢٣٧) وبمثل ذلك يبرهن على ان زاوية ا س ب

مكمله للزاوية المستوية بمقاس الزوجية  $\angle$  وان زاوية  $\angle$  مكمله للزاوية المستوية  
مقاس الزوجية  $\angle$  ا

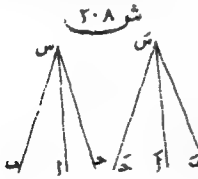
ثانيا - حيث كان  $\angle$  عمودا على الوجه  $\angle$   $\angle$  فيكون عمودا على  $\angle$  وكذا  
حيث كان  $\angle$  عمودا على الوجه  $\angle$   $\angle$  فيكون عمودا على  $\angle$  وبناء عليه يكون  
 $\angle$  عمودا على المستوى  $\angle$   $\angle$  وغير ذلك حيث كان  $\angle$  عمودا على الوجه  $\angle$   $\angle$   
وكان هو والحرف  $\angle$   $\angle$  في جهة واحدة بالنسبة للوجه  $\angle$   $\angle$  تكون زاوية  $\angle$   $\angle$   
حاددة وحيث قد ثبت ان  $\angle$  عمودا على المستوى  $\angle$   $\angle$  ومكون مع  $\angle$  زاوية قائمة  
فيكون حينئذ هو والحرف  $\angle$   $\angle$  في جهة واحدة بالنسبة للوجه  $\angle$   $\angle$

وبمثل ذلك يشاهد ان  $\angle$  عمودا على المستوى  $\angle$   $\angle$  وانه والحرف  $\angle$   $\angle$  في جهة  
واحدة بالنسبة لهذا المستوى وان  $\angle$  عمودا على المستوى  $\angle$   $\angle$  وانه هو والحرف  
 $\angle$   $\angle$  في جهة واحدة بالنسبة لهذا المستوى وحينئذ فيمكن اعتبار الزاوية  $\angle$   $\angle$  كأنها  
انشئت من الزاوية  $\angle$   $\angle$  بالطريقة التي انشئت بها الزاوية  $\angle$   $\angle$  من الزاوية  
 $\angle$   $\angle$  واذن فتكون زواياها المستوية مكمله للزوايا المستوية التي تقاس بها الزوايا الزوجية  
من المجسم  $\angle$   $\angle$

## دعوى نظرية

(٢٣٩) اذا تساوى وجهان من زاوية مجسمة ثلاثية يتساوى الزاويتان الزوجيتان المقابلتان

لهما وبالعكس (شكل ٢٠٨)



أولا - ليكن الوجه  $\angle$   $\angle$  = الوجه  $\angle$   $\angle$

وتطلب البرهنة على ان الزاوية الزوجية  $\angle$   $\angle$

تساوي الزاوية الزوجية  $\angle$   $\angle$

والوصول الى ذلك نضع بجانب المجسم المقروضة

مماثلتها  $\angle$   $\angle$  ثم نطبق الثانية على الاولى

بان نضع الزوجية  $\angle$   $\angle$  على مساويتها  $\angle$   $\angle$

وحيث ان الوجه  $\angle$   $\angle$  مساو للوجه  $\angle$   $\angle$  فيكون مساويا للوجه  $\angle$   $\angle$  واذن

فيطبق الحرف  $\angle$   $\angle$  على  $\angle$   $\angle$  وبمثل ما ذكر ينطبق الحرف  $\angle$   $\angle$  على الحرف

$\angle$   $\angle$  وبذلك ينطبق المجسمتان على بعضهما وتكون الزاوية الزوجية  $\angle$   $\angle$  مساوية للزاوية

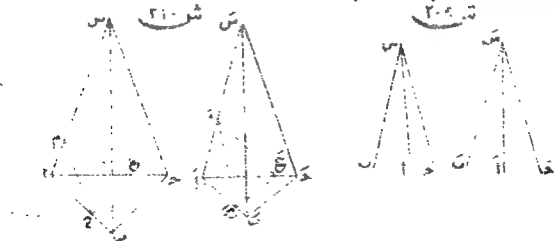
الزوجية  $\angle$   $\angle$  واذن تكون الزوجية  $\angle$   $\angle$  مساوية للزوجية  $\angle$   $\angle$  وهو المراد

(٤) القصفه اليه (ثالث)

ثانياً - لتكن الزوجية  $س ب$  مساوية للزوجية  $س ح$  وتطلب البرهنة على ان الوجه  $ب س ا$  مساو للوجه  $ح س ا$   
 وللوصول الى ذلك نضع بجانب المجسمة الثلاثية المفروضة مماثلتها  $س ح ا$  ب ثم نطبق الثانية على الاولى بان نضع الوجه  $ح س ب$  على مساويه  $ح س ب$  ومن حيث ان الزوجية  $س ب$  مساوية للزوجية  $س ب$  وكانت هذه الاخيرة مساوية للزوجية  $س ح$  فرضاً فتكون الزوجية  $س ب$  مساوية للزوجية  $س ح$  واذن فيأخذ الوجه  $ب س ا$  اتجاه الوجه  $ح س ا$  وبمثل ما ذكرنا يأخذ الوجه  $ح س ا$  اتجاه الوجه  $ب س ا$  وبذلك ينطبق الحرف  $س ا$  على الحرف  $س ا$  وينطبق المجسمتان على بعضهما ما يكون الوجه  $ب س ا$  المساوي للوجه  $ب س ا$  مساوياً للوجه  $ح س ا$  أعني ان الوجه  $ب س ا$  مساو للوجه  $ح س ا$  وهو المطلوب

### دعوى نظرية

(٢٤٠) يتساوى المجسمتان الثلاثيتان اذا وجد فيهما واحد من الامور الآتية  
 أولاً - اذا ساوى من احدهما زاوية زوجية والوجهان المحيطان بهما لتظايرهما من الثانية  
 ثانياً - اذا ساوى من احدهما وجهه والزوجيتان المجاورتان له لتظايرهما من الثانية  
 ثالثاً - اذا تساوت فيهما الاوجه الثلاثة كل لتظايرهما  
 رابعاً - اذا تساوت فيهما الزوايا الزوجية الثلاثة كل لتظايرهما  
 برهان الاول - (شكل ٢٠٩) تطبق احدى المجسمتين على الاخرى بالطريقة التي أجريت  
 (بنمرة ٢٣٩) أولاً  
 برهان الثاني - (شكل ٢٠٩) تطبق احدى المجسمتين على الاخرى بالطريقة التي أجريت  
 (بنمرة ٢٣٩) ثانياً  
 برهان الثالث - (شكل ٢١٠) تؤخذ الارواح الستة من المجسمتين متساوية ثم تفصل



المستقيمت  $ا د$  و  $ا ب$  و  $ب ح$  و  $ا ح$  و  $ا د$  و  $ب ح$  فالثلاث المتساوية الساقين الحادثة في المجسم الاول وهي  $ا س ب$  و  $ا س ح$  و  $ب س ح$  تكون مساوية لنظائرها من الثانية كما لا يخفى واذن يكون المثلثان  $ا ب ح$  و  $ا ب ح$  متساويين لتساوي أضلاعهما الثلاثة المتناظرة اذ اقرر هذا ومرزبا بالنقطة الاختيارية  $م$  من الحرف  $ا$  مستويا عوديا على الحرف المذكور فانه يقطع الوجهين  $ا س ح$  و  $ا س ب$  في المستقيمين  $م ح$  و  $م د$  وتكون الزاوية  $ح م د$  مقاسا للزوجية من  $ا$  وغير ذلك فان المستقيم  $م ح$  لا بد ان يقابل المستقيم  $ا ح$  لانه اذا وازاه تكون زاوية من  $ا ح$  قائمة وهذا ممنوع هنا لان المثلث  $س ا ح$  متساوي الساقين ويعين هذا السبب يقابل المستقيم  $م د$  المستقيم  $ا ب$  ثم يوصل  $ح د$  ويؤخذ بذلك البعد  $ا م = ا م$  ويجرى في نقطة  $م$  عين ما جرى في نقطة  $م$  فتكون زاوية  $ح م د$  مقاس الزوجية  $ا م$  ويوصل  $ح د$

فالمثلثان  $ح م ا$  و  $ح م ا$  متساويان لتساوي ضلع ومجاورتا من الزوايا من احدهما لنظائرها من الثاني وينتج من تساويهما ان  $ا ح = ا ح$  و  $ح م = ح م$  ويحل ذلك يبرهن على ان  $ا د = ا د$  و  $م د = م د$  أما المثلثان  $ا ح د$  و  $ا ح د$  ففي احدهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما مساوية لنظائرها من الثاني فيكونان متساويين وينتج من تساويهما ان  $ح د = ح د$  واذن فالمثلثان  $ح م د$  و  $ح م د$  متساويان لتساوي الاضلاع الثلاثة المتناظرة فيهما وسينتد تكون زاوية  $ح م د = ح م د$  أعني ان الزوجية من  $ا$  تساوي الزوجية من  $ا$  وبذلك فقد رجع الامر الى الحالة الاولى

برهان الرابع - يقال لتكونا  $س$  و  $س$  المجسمتين الثلاثيتين المعاويتين و  $ط$  و  $ط$  مكملتيهما فن حيث ان الزوايا الزوجية من المجسمتين المعاويتين  $س$  و  $س$  متساويتان تكون الزوايا المستوية من مكملتيهما  $ط$  و  $ط$  أو أوجههما المتناظرة متساوية (٢٣٨) غير ان تساوي الواجه المتناظرة من المجسمتين  $ط$  و  $ط$  يقتضي تساوي الزوايا الزوجية المتناظرة فيهما (الثالث) وهذا يستلزم تساوي الواجه المتناظرة من المجسمتين الاصليتين  $س$  و  $س$  وهو المراد

تنبيه ١ - النظريات الثلاثة الاولى من هذه الدعوى لها نظائر في تساوي المثلثات دون النظرية الرابعة حيث قد علم ان تساوي زوايا مثلثين لا يستلزم تساويهما بل يقتضي تشابههما فقط

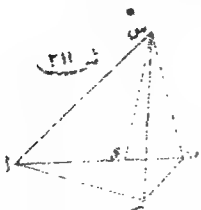
تنبيه ٢ - اذا لم تكن الاجزاء المتساوية في المجسمتين الثلاثيتين المعاويتين موضوعة على ترتيب واحد فلا تكون تلك المجسمات متساوية بل تكون متماثلة كما ذكر سابقا وفي مثل ذلك

نجري البراهين على احدى المجسمتين ومماثلتها

## دعوى نظرية

(٢٤١) أى وجه أو زاوية مستوية من زاوية مجسمة ثلاثية أصغر من مجموع الوجهين الآخرين

(شكل ٢١١)



ليكن  $\angle ASB$  الوجه الأكبر من المجسمة الثلاثية  $S$   
وتطلب البرهنة على أنه أصغر من  $\angle ASB + \angle BSC$   
ولذلك تؤخذ الزاوية  $\angle BSC$  من الزاوية الكبرى  
 $\angle ASB$  مساوية لزاوية  $\angle BSC$  ثم يمد المستقيم  
الاختياري  $BS$  ويؤخذ  $SD = SB$  ويوصل  
 $AD$  و  $CD$  فالمثلثان  $ASD$  و  $BSC$  متساويان

لتساوي من أحدهما ضلعان والزاوية المحصورة بينهما لنظرهما من الثاني وينتج من تساويهما  
أن  $\angle ASD = \angle BSC$

ليكن المثلث  $ASD$  فيه  $\angle ASD > \angle ASB + \angle BSC$  أو  $\angle ASD > \angle ASB$

ثم إذا قورن المثلثان  $ASD$  و  $ASB$  ببعضهما نجد أن الضلعين  $AS$  و  $SD$  من أحدهما  
مساويان لتطيريهما من الثاني غير أنه لما كان الضلع الثالث من الأول وهو  $AD$  أكبر من نظيره  
 $AB$  تكون زاوية  $\angle ASD$  أكبر من زاوية  $\angle ASB$  وهو المراد

## دعوى نظرية

(٢٤٢) الزاوية الزوجية الكبرى من أى زاوية مجسمة ثلاثية يقابلها الوجه الأكبر منها

وبالعكس (شكل ٢١٢)



أولاً - لتكن الزاوية الزوجية  $\angle ASB$  من المجسمة الثلاثية  
 $S$  أكبر من الزوجية  $\angle SCD$  وتطلب البرهنة على أن  
الوجه  $\angle ASB$  أكبر من الوجه  $\angle CSD$   
والوصول إلى ذلك يمرر بالمخرف  $S$  مستوي يصنع مع  
الوجه  $\angle ASB$  الزاوية الزوجية  $\angle ASD$  مساوية  
للزوجية  $\angle SCD$  وهذا المستوى يقابل الوجه  $\angle ASB$

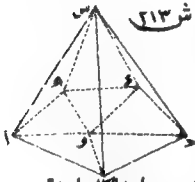
في المستقيم  $SD$  وبذلك يكون في المجسمة الثلاثية الحادثة من  $\angle ASD$  زاويتان زوجيتان  
متساويتان  $\angle ASD$  و  $\angle CSD$  فيكون الوجهان المقابلان لهما  $\angle ASB$  و  $\angle CSD$  متساويين

(٢٣٩ ثانياً) لكن المجسمة الثلاثية  $س د ح$  فيها الوجه  $ح س ب > ح س د + ب س د$  أو  $ح س ب > ب س ا$  وهو المطلوب

ثانياً - إذا كان الوجه  $ا س ب$  أكبر من الوجه  $ب س ح$  يجب أن تكون الزوجية  $س ح$  أكبر من الزوجية  $س ا$  لانه ان لم يكن كذلك وكانت تساويها أو أصغر منها لزم أن يكون الوجه  $ا س ب$  امامساويا للوجه  $ب س ح$  (٢٣٩ ثانياً) أو أصغر منه (أولاً) وكلاهما مخالف للفرض

### دعوى نظرية

(٢٤٣) مجموع الزوايا المستوية لاي زاوية مجسمة (ثلاثية كانت أو كثيرة الاوجه) أصغر من أربع قوائم (شكل ٢١٣)



لذلك تقطع جميع أوجه المجسمة بمستويات تشكل من خطوط تقاطعاتها معها شكل كثير الاضلاع  $ا ب ح د ه$  فإذا فرضت نقطة  $و$  داخله ووصل منها الى رؤسه بمستقيمات فانه يتكون حولها مثلثات متحدة في العدد مع المثلثات المجتمعة في نقطة  $س$  غير أن بعض زوايا مثلثات الجحلة الاولى المرموزة بالحرف  $و$  مجتمع حول نقطة  $و$  وبعضها الآخر المرموزة بالحرف  $ا$  يتركب منه وجه واحد لكل واحدة

من الزوايا المجسمة الثلاثية  $ا ب و ح د ه$  وكذا بعض زوايا الجحلة الثانية المرموزة بالحرف  $س$  مجتمع حول نقطة  $س$  وبعضها الآخر  $ب$  مكمل لباقي أوجه المجسمات  $ا ب و ح د ه$  ولما كان مجموع الزوايا القائمة المشغل عليه كل واحد من الجلتين

واحداً يحدث  $و + ا = س + ب$

وحيث ان المجموع  $ا$  أصغر من المجموع  $ب$  (٢٤١) يجب أن يكون المجموع  $و$  أكبر من المجموع  $س$  أعني أن الزوايا المستوية المجتمعة في نقطة  $س$  أقل من أربع قوائم

### دعوى نظرية

(٢٤٤) مجموع الزوايا الزوجية لاي زاوية مجسمة ثلاثية أكبر من قائمتين وأصغر من ست قوائم وإذا أضيف قائمتان الى أصغر الزوايا الزوجية كان المجموع أكبر من مجموع الزاويتين الزوجيتين الباقيتين

أولاً - إذا كان  $\bar{A}$  و  $\bar{B}$  و  $\bar{C}$  رموزاً للزوايا الزوجية للمجسمة الثلاثية المعلومة  
و  $A$  و  $B$  و  $C$  رموزاً للزوايا المستوية للمجسمة الثلاثية المكاملة للمجسمة المعلومة حدث

$$\bar{A} = \bar{B} - \bar{C} \text{ و } \bar{B} = \bar{C} - \bar{A} \text{ و } \bar{C} = \bar{A} - \bar{B} \text{ أو}$$

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = \bar{A} - \bar{B} - \bar{C} \text{ و } \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = \bar{A} - \bar{B} - \bar{C}$$

وحيث أن المجموع  $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$  أكبر من صفر وأصغر من أربع قوائم (٢٤٣) فيكون

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} < \bar{A} - \bar{B} - \bar{C} \text{ و } \bar{A} + \bar{B} + \bar{C} < \bar{A} - \bar{B} - \bar{C}$$

ثانياً - إذا كانت  $\bar{A}$  أصغر الزوايا الزوجية تكون أوجه المجسمة المكاملة هي  $\bar{B} - \bar{C}$  و

$$\bar{B} - \bar{C} < \bar{A} \text{ و } \bar{C} - \bar{A} < \bar{B} \text{ و يكون الوجه } \bar{B} - \bar{C} - \bar{A} \text{ هو أكبرها وعلى مقتضى ما تقدم}$$

(٢٤١) يحدث

$$\bar{B} - \bar{C} > \bar{A} - \bar{B} - \bar{C} \text{ و } \bar{C} - \bar{A} > \bar{B} - \bar{C} - \bar{A}$$

وبضم  $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$  إلى طرفي المتباينة وطرح قائمتين منهما يحدث

$$\bar{B} + \bar{C} > \bar{A} + \bar{B} - \bar{C} \text{ وهو المراد}$$

## دعوى نظرية

(٢٤٥) \* لا يمكن تشكيل زاوية مجسمة ثلاثية ثلاث زوايا مستوية معلومة يجب ويمكن أن

\* يكون مجموعها أقل من أربع قوائم وأن تكون أكبرها أصغر من مجموع الاثنين الآخرين

(شكل ٢١٤)

\* قد علم مما سبق (٢٤٣) و (٢٤١) لزوم هذين الشرطين

\* والآن نبرهن على كفايتهما

\* لتكن  $B$  و  $C$  و  $A$  من  $B$  و  $C$  الزوايا

\* الثلاثة المعلومة فنفرض أنها موضوعة في مستو واحد

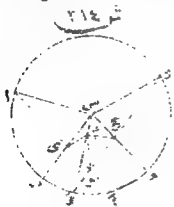
\* وأن الزاوية  $B$  هي الكبرى

\* فنجعل نقطة  $S$  مركزاً ونصف قطراً اختيارياً برسم

\* محيط دائرة ونيزل من النقطتين  $A$  و  $D$  العمودين  $AA'$  و  $DD'$  على الضلعين  $SB$  و  $SC$

\* فنحن حيث أن الزاوية  $B$  هي الكبرى فيكون القوس  $B$  أكبر من كل واحد

\* من القوسين  $AB$  و  $DC$  ولكون القوس  $AB =$  القوس  $B$   $A'$  يجب أن تقع نقطة  $A'$







## الفصل الثامن

### تمارينات

- ١ - هل يتعين وضع مستوي يجزئ من منح معلوم
- ٢ - اذا أنزل من نقطة خارج مستو عود عليه طول ٣ مترو مائل طول ٤ مترو والمطلوب تعيين طول مسقط هذا المائل على المستوى
- ٣ - اذا فرضت نقطة متباعدة عن مستوي بعد ٨ مترو مركزها ورسم محيط دائرة على هذا المستوى وكان نصف قطرها ٦ مترو والمطلوب تعيين بعد النقطة المذكورة عن أى نقطة من نقط محيط الدائرة
- ٤ - اذا رسمت دائرة في مستو مسطحها ٢٠ مترا ربعا وفرضت نقطة خارجة عنه وعلى العمود القائم من مركز الدائرة وكانت متباعدة عن نقط محيطها بعد ١٥ مترا والمطلوب تعيين بعدها عن مركز الدائرة
- ٥ - المطلوب تعيين محل النقط الفراغية المتساوية البعد عن نقطتين معلومتين
- ٦ - المطلوب تعيين في الفراغ محل النقط المتساوية البعد عن ثلاث نقط معلومة ليست على استقامة واحدة
- ٧ - المطلوب تعيين في مستو محل النقط المتساوية البعد عن نقطة خارجة عنه
- ٨ - المطلوب البرهنة على ان اجراء المستقيمين المحصورين بين مستويات متوازية هي مناسبة
- ٩ - المطلوب البرهنة على انه اذا قطع مستويين متوازيين تكون الزوايا الزوجية المتبادلة متساوية والمتناظرة كذلك والمجاورة للمستوى القاطع متكاملة



وبناء عليه تكون جميع نقط القطع على إبعاد متساوية من نقطة  $و$  وبذلك يكون محيط دائرة مركزه  $و$

نتيجة - البرهان المتقدم لا يوافق الحالة التي يرميها المستوى القاطع بمركز الكرة غير أنه يسهل مشاهدة أن جميع نقط هذا القطع على إبعاد متساوية من المركز وكل بعد منها مساو لنصف قطر الكرة وأذن فيكون القطع دائرة لكنه حيث أن  $و > و$  يمكن أن يسمى كل قطع مار بمركز الكرة بدائرة عظيمة وكل قطع لم يمر بمركزها بدائرة صغيرة

نتيجة ١ - إذا جعل  $و$  رمزاً لنصف قطر الكرة  $و$  رمزاً لنصف قطر أي دائرة صغيرة  $و$  رمزاً للبعد مستوي هذه الدائرة الصغيرة عن مركز الكرة فحصل  $و = و + و$  وهو ما يربط يمكن أن يستنتج منه النظرتان الآتيتان

الاولى - في كرة واحدة أو في كرات متساوية الدوائر الصغيرة المتساوية إبعادها عن مركز الكرة متساوية وبالعكس

الثانية - في كرة واحدة أو في كرات متساوية أصغر الدوائر الصغيرة ما كان بعد مستويها عن مركز الكرة أطول وبالعكس

نتيجة ٢ - لا يمكن أن يقابل المستقيم سطح الكرة في أكثر من نقطتين لأنه لا يقابل الدائرة الحادثة من قطع الكرة بمستوى متقل عليه في أكثر من نقطتين

نتيجة ٣ - أي دائرتين عظيمتين في كرة واحدة متساويتان ويتقاطعا على قطري نصف كل واحدة منهما

نتيجة ٤ - أي نقطتين مفروضتين على سطح الكرة لا يمكن أن يمر بهما الا قوس واحد من دائرة عظيمة وذلك لأن مستوى الدائرة العظيمة يتعين نقطتين من سطح الكرة وبمركزها

نتيجة ٥ - أي ثلاث نقاط مفروضة على سطح الكرة لا يمكن أن يمر بها الا محيط دائرة واحد وذلك لأن هذه النقط لما لم تكن على استقامة واحدة فلا يتعين بها الاستواء واحد

وأما أي نقطتين فانه يمكن أن يمر بهما مقدار لا نهائي من أقواس الدوائر الصغيرة

نتيجة ٦ - كل دائرة عظيمة تقسم الكرة الى قسمين متساويين

## تعريف

(٢٥١) قطب الدائرة هما نقطتا تقابل قطر الكرة العمودي على مستوى الدائرة بسطح الكرة فالتقطتان  $ا و ب$  (شكل ٢١٥) هما قطبا الدائرة  $هـ م ج$

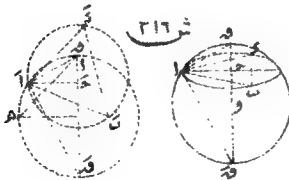
## دعوى نظرية

(٢٥٢) قطب أى دائرة على ابعاد متساوية من نقط محيطها (شكل ٢١٥)  
لذلك نصل أحد القطبين أ أو ب الى جميع نقط محيط الدائرة صغيرة كانت أو عظيمة ثم يقال  
حيث ان جميع هذه المستقيمات هى موازات لى قد افترقت بابعاد متساوية عن موقع العمود أو أ و ب  
فتكون متساوية واذن تكون أقواس الدوائر العظيمة الموتره بها كذلك  
تنبيه - يطلق اسم نصف القطر الكروى للدائرة هـ م ع على قوس الدائرة العظيمة أ م وكل  
دائرة مرسومة على سطح الكرة مثل هـ م ع يمكن اعتبار أولها من دوران نقطة م نهاية القوس  
أ م حول نقطة أ ولذا تعتبر نقطة أ كأنها مركز الدائرة والقوس أ م نصف قطر لها واذن  
فلكل دائرة مرسومة على سطح الكرة م ك زان على سطحها ونصفا قطر من كرويين متكاملان  
نصفا القطرين الكرويين لى أى دائرة عظيمة يكونان متساويين ومقدار كل واحد منهما ربع محيط  
دائرة عظيمة

نتيجة - يمكن بواسطة برجل ذى فرعين غير متساويين مصنوع صناعة مناسبة رسم محيط دائرة  
على سطح الكرة مع السهولة التى بها يرسم المحيط المذ كور على مستوئنا اذا كانت الدائرة التى يراد  
رسمها عظيمة فان فتحة البرجل يجب ان تكون مساوية لضلع المربع المرسوم داخل دائرة نصف  
قطرها مساو لنصف قطر الكرة

## دعوى عملية

(٢٥٣) المطلوب تعيين نصف قطر كرة لا يمكن الدخول فيها (شكل ٢١٦)



نعتبر نقطة ق من سطح الكرة  
كأنها قطب ومنها نرسم محيط الدائرة  
أ ب د ثم تصور مد القطر ق و  
العمودى على مستوى هذه الدائرة  
ولكن ح مركزها ثم فصل نقطة ق من  
نقط المحيط أ الى النقطة و ق و  
فاذا أمكن رسم المثلث ق أ و القائم

الزاوية فإنه يتوصل الى معرفة نصف القطر بواسطة أخذ نصف البعد ق و وتصور المسئلة  
اذن محولة

والوصول الى ذلك نعين على محيط الدائرة النقط الثلاثة  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  وبواسطة قياس الاوتار  $\alpha\beta$  و  $\beta\gamma$  و  $\gamma\alpha$  يرسم المثلث  $\alpha\beta\gamma$  مساويا للمثلث  $\alpha\beta\gamma$  ويرسم عليه محيط دائرة فيكون نصف قطره  $\alpha\beta$  مساويا لنصف القطر  $\alpha\beta$  ثم يرسم بعد ذلك المثلث  $\alpha\beta\gamma$  القائم الزاوية حيث يعلم منه الضلع  $\alpha\beta$  والوتر  $\alpha\gamma$  ثم يقام من نقطة  $\alpha$  عمود على الضلع  $\alpha\beta$  ويمد حتى يتلاقى مع امتداد  $\beta\gamma$  فيعين بذلك  $\beta$ .

نتيجة - متى تعين نصف قطر الكرة فإنه يمكن أن يرسم به دائرة عظيمة على مستوى العمل وبذلك يمكن أن يتوصل الى مقدار طول ضلع المربع المرسوم داخلها الذي يحتاج اليه الامر عند ما يراد رسم دائرة عظيمة

## دعوى نظرية

(٢٥٤) المستوى العمودي على نهاية نصف قطر الكرة يكون مماسا لها وبالعكس (شكل ٢١٧)



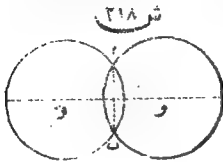
أولا - ليكن  $M$  مستويا عموديا على نهاية نصف القطر  $OA$  فمن حيث ان كل مستقيم مثل  $OB$  يكون مائلا على المستوى  $M$  فيكون أطول من العمود وبذلك تكون نقطة  $B$  خارجة عن سطح الكرة واذن فلا يشترك المستوى  $M$  مع سطحها الا في نقطة  $A$ .

ثانيا - اذا كان  $M$  مستويا مماسا لسطح الكرة أي لا يشترك معها الا في نقطة  $A$  فكل مستقيم مثل  $OB$  يكون أطول من البعد  $OA$  لان نقطة  $B$  خارجة عن سطح الكرة واذن فالمستقيم  $OA$  أصغر جميع المستقيمت التي يمكن مدها من نقطة  $O$  الى المستوى  $M$  وبناء عليه فيكون عمودا على المستوى وهو المراد  
نتيجة - كل نقطة مفروضة على سطح الكرة لا يمكن أن يمر بها الامتداد واحد مماس لسطح الكرة

## دعوى نظرية

(٢٥٥) خط تقاطع سطحي كرتين هو محيط دائرة يكون مستويا عمودا على المستقيم الواصل بين مركزيهما واما مركزه فهو موجود على المستقيم المذكور (شكل ٢١٨)  
ليكونا  $O$  و  $O'$  مركزي الكرتين فتوهم  $MO$  و  $MO'$  مستويا المستقيم المار بالمركزيين فيقطع الكرتين

قد اتفق و و و المتقاطعتين ويكون فيهما الوز المشترك أب عمودا على المستقيم الواصل بين المركزين ومنقسمه إلى قسمين متساويين



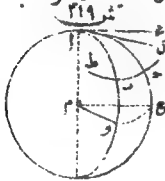
فإذا تصورنا الآن دوران الدائرتين حول و و فان سطحَي الكرتين يتولدان من دوران المحيطين وأما الأوضاع المختلفة للمستقيم أب فانه يتولد منها مستوعود على و و وأما النقطتان المتطرفتان ا و ب فانهما يرسمان في أثناء

هذه الحركة محيط دائرة مركزه موجود على و و وهو المراد

تنبيه - جميع النظريات التي سبق إيرادها في الباب الثاني من الجزء الاول بخصوص أوضاع الدوائر بالنسبة لبعضها يمكن تطبيقها هنا أيضا على الكرتين

### دعوى نظرية

(٢٥٦) الزاوية الواقعة بين قوسى دائرتين عظيمتين تقاس بقوس الدائرة العظيمة الذى يكون قطبه رأس الزاوية ونصف قطره ربع محيط دائرة عظيمة (شكل ٢١٩)



يطلق اسم الزاوية الواقعة بين قوسى دائرتين عظيمتين على الزاوية الزوجية الواقعة بين مستوييهما وتقدم بمر (٢٢٤ نتيجة) ان الزاوية الزوجية تقاس بزاوية العمودين بفرض أن وحدة الزوايا الزوجية تقاس بزاوية العمودين التى مقدارها وحدة الزوايا المستوية

فإذا اعتبرنا رأس الزاوية أ قطبا ورسمنا محيط دائرة ح و بنصف قطر مساو ربع محيط دائرة عظيمة فان مستوييه يكون عمودا على الحرف أ م للزاوية الزوجية الواقعة بين المستويين المارين بقوسى الدائرتين العظيمتين ويقطع هذين المستويين فى المستقيمين ح م و م المتكون بينهما زاوية العمودين للزاوية الزوجية المذكورة حيث ان هذه الزاوية للمستوية تقاس بالقوس ح و المحصورين ضلعها فتكون زاوية القوسين كذلك وهو المراد

تنبيه - ويمكن أيضا اعتبار زاوية المماسين أه و آل الخارجين من نقطة ا ومماسين لقوسى الدائرتين العظيمتين مقاسا لزاوية القوسين المذكورين

## الفصل الثاني

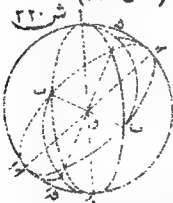
في المثلثات وكثيرى الاضلاع الكروية

### تعاريف

- (٢٥٧) المثلث الكروى هو جزء من سطح الكرة محصور بين ثلاث أقواس دوائر عظيمة
- يجب أن نعتبر دائماً عند دراسة المثلثات الكروية أن يكون أى ضلع من أضلاعها أصغر من نصف محيط
- يتركب المثلث الكروى من ستة أجزاء ثلاثة أضلاع  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  وثلاث زوايا  $A$  و  $B$  و  $C$  مقابلة لها
- (٢٥٨) كثيراً الاضلاع الكروى هو جزء من سطح الكرة محاط بمجملة أقواس دوائر عظام متقاطعة مثنى ويقال له محذب متى كان موجوداً بتمامه فى احدى نصفي الكرة المحددين بامتداد أحد أضلاعه
- أى ضلع من أى كثيراً أضلاع كروى محذب أصغر دائماً من نصف محيط دائرة عظيمة لانه لو فرض أن أحد أضلاعه يزيد عن ذلك فإنه لا يتأتى وجود الشكل بتمامه فى احدى نصفي الكرة المحددين بامتداد احد الضلعين المجاورين للضلع المذكور وبناء عليه لا يكون الشكل محذباً

### دعوى نظرية

- (٢٥٩) كل كثيراً أضلاع كروى يقابله آخر من سون على سطح الكرة تكون أجزاؤه متساوية
- أجزاء الاول غير أنها موضوعة فى ترتيب مغاير لوضع ترتيبها فى الاول (شكل ٢٢٠)
- فإذا وصل بين المركز  $O$  وبين رؤس الشكل مستقيمات
- ومدت على استقامتها من الجهة الأخرى حتى تلاقى سطح
- الكرة فإنه يتشكل من ذلك كثيراً أضلاع كروى جديد اذا قورن
- بالشكل الاول نجد فيها الاضلاع متساوية لانها مقاييس
- زوايا متساوية لانه تساوى الزوايا الزوجية المتقابلة بالحرف (٢٢٧)
- ثالثة غير اننا نجد اختلافاً فى ترتيب وضع الاضلاع والزوايا
- فيها وهو أمر يسهل بيانه لانه من المعلوم اذا أريد ترتيب أجزاء أى كثيراً أضلاع كروى فإنه

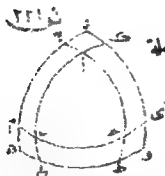




- \* يتبع السيرة على محيطه وعلى سطح الكرة بدون الدخول فيها فتجهدا دائما فتوجهه معينة
- \* ولتكن من الشمال الى اليمين مثلا ثم نمرأ جزءا على حسب ترتيب المرور عليها
- \* اذا قرر هذا واعتبرنا أن وضع النقط الثلاثة للمثلث  $أ ب ج$  هو طردي ظهر لنا أن النقط
- \* المناظرة لها في المثلث  $أ ب ج$  مغايرة لها في الوضع لان الانتقال من نقطة  $أ$  الى  $ب$  يقتضى
- \* الصعود فوق مستوى العمل بخلاف الانتقال من  $أ$  الى  $ب$  فانه يقتضى الهبوط تحته
- \* تنبيه - كل كثير أضلاع كرويين متماثلين لا يمكن انطباقهما على بعضهما لانه لو أمكن
- \* ذلك لزم انطباق الاجزاء المتساوية المتحددة الاسم على بعضها وهذا يقتضى اتحادهما في
- \* ترتيب الوضع وهو مخالف للغرض

### دعوى نظريه

- \* (٢٦٠) اذا أنشأنا مثلثا كرويا تكون رؤسها أقطابا للأضلاع مثلث كروي معلوم بحيث
- \* يكون بعد كل واحد من هذه الأقطاب عن الرأس المقابل له من المثلث المقروض أقل من ربع
- \* محيط دائرة عظيمة فانه يتكون ما يسمى بالمثلث القطبي للمثلث الاول ويحدث
- \* أولا - ان المثلث المعلوم يكون مثلثا قطبيا للمثلث المتسا
- \* (شكل ٢٢١)



- \* ثانيا - ان كل زاوية من أحد المثلثين تكون مكملية
- \* للضلع المناظر لها من المثلث الثاني
- \* قبل البرهنة على هذه النظرية تذكر القاعدة الآتية
- \* **قاعدة**

- \* كل نقطة مفروضة على سطح الكرة بين محيط دائرة عظيمة وقطبها أى موجودة معها في نصف
- \* كرة واحد يكون بعدها عن هذا القطب أقل من ربع محيط دائرة عظيمة وبالعكس اذا كان
- \* البعدين نقطتين على سطح الكرة أقل من ربع محيط دائرة عظيمة وكانت احداهما قطبا لمحيط
- \* دائرة عظيمة تكون النقطتان المذكورتان موجودتين في نصف كرة واحد من نصفين المحددتين
- \* بمحيط الدائرة العظيمة المذكورة
- \* ولا تحتاج هذه القاعدة الى البرهنة عليها البدها من الماهوم معلوم من أن بعد قطب أى دائرة
- \* عظيمة عن أى نقطة من نقطتها هو ربع محيط دائرة عظيمة

\* إذا قرر هذا يقال لذا كان  $أ ب$  هو المثلث الكروي المعلوم فن حيث ان قطب الضلع  $ب$  يجب أن يكون متباعدة عن كل واحدة من النقطتين  $ب$  و  $د$  بمقدار ربع محيط دائرة عظيمة فيعين اذن بواسطة أن مركز في كل واحدة من هاتين النقطتين ويبعد مساو لربع محيط دائرة عظيمة يرسم قوسا محيطي دائرتين عظمتين  $د ه$  و  $و$  يتقاطعان في نقطتين نأخذ احدهما  $د$  الموجودة في جهة واحدة مع النقطة  $أ$  بالنسبة للقوس  $ب د$  ثم اذا أجرى عمل مشابه لذلك في تعيين النقطتين  $ه$  و  $و$  قطبي الضلعين  $أ ح$  و  $أ ب$  فانه يشكل من ذلك المثلث القطبي  $د ه و$

\* برهان الاول - يقال حيث ان نقطة  $أ$  متباعدة عن النقطتين  $و$  و  $ه$  من قوس الدائرة العظيمة وه بمقدار ربع محيط دائرة عظيمة فتكون اذن قطبا للقوس وه وزيادة على ذلك حيث أن البعدين  $أ$  و  $د$  أقل من ربع محيط دائرة عظيمة على مقتضى ما ذكر بالقائدة وكانت  $أ$  قطبا للقوس هو فتكون هي ونقطة  $د$  في نصف الكرة المحدد بالقوس هو واذن فيكون المثلث  $أ ب د$  قطبا للمثلث  $د ه و$  أعني أن المثلث  $أ ب د$  يمكن ايجاده من المثلث  $د ه و$  بالطريقة التي استعملت لايجاد ه من المثلث  $أ ب د$

\* برهان الثاني - يقال من المعلوم أن زاوية  $أ$  تقاس بالقوس  $ع ط$  وأن  $ع ط + ه و = (ع و - ط و) + (ه ط + ط و) = ع و + ه ط$  يساوي ربعي محيط دائرة عظيمة أي يساوي قائمتين وهو المراد

\* تنبيه - يمكن مطابقة هذه النظرية مع التي تقدم ذكرها للزاوية المجسمة الثلاثية (٢٣٨) وذلك لان الوصلان من الرأس المثلثين فانما تحصل على المجسمتين الثلاثيتين  $م أ ب د$  و  $م د ه و$  ونظرا لتعرف القطب يكون  $د$  عمودا على المستوى  $ب د م$  وعلى مقتضى شرط انتخاب القطب  $د$  يكون هو و نقطة  $أ$  في جهة واحدة بالنسبة للوجه  $ب د م$  وحينئذ تكون المجسمة  $م د ه و$  مكمله للمجسمة  $م أ ب د$  ويمكن أن يقال من الآن على وجه العموم أن كل نظريتين نظريات المثلثات الكروية أو المضلعات الكروية يقابلها نظرية مطابقة لها على المجسمات الثلاثية أو على المجسمات كثيرة الاوجه

### دعوى نظرية

\* (٢٦١) اذا أنشأنا كثيرة أضلاع كروي تكون رؤسه أقطابا لكثير أضلاع كروي محدد بحيث يؤخذ كل واحد من هذه الاقطاب بالنسبة للضلع المقابل له في نصف الكرة المشتملة على

\* كثيرا الاضلاع المعلوم فانه يتشكل من ذلك مضلع كروي قطبي المضلع الكروي المحلّب المعلوم ويحدث

\* أولا - ان كثيرا الاضلاع المعلوم يكون قطبيا كثيرا الاضلاع المتسا (شكل ٢٢٢)

\* ثانيا - ان زوايا احدهما تكون مكملة للاضلاع

\* المناظرة لهما من الثاني



\* ليكن  $AB$  و  $AC$  مضلعا كرويا محلّبا معلوما

\* ثم اعتبرنا نقطة  $A$  احدى قطبي القوس  $BC$

\* الموجودة معه في نصف الكرة المحلّب امتداد القوس

\*  $AB$  والموجود به النقط  $H$  و  $D$  و  $E$  بمعنى ان

\* بعد نقطة  $A$  عن كل واحدة من هذه النقط الثلاثة

\* أقل من ربع محيط دائرة عظيمة واستمرنا على هذا النوال في سائر الاقطاب  $B$  و  $C$

\* و  $D$  و  $E$  فانه يتكون من ذلك المضلع القطبي  $ABC$  بواسطة وصل هذه

\* الاقطاب ببعضها باقواس دوائر عظام

\* برهان الاول - يقال حيث ان نقطة  $A$  مشتركة بين القوسين  $AB$  و  $AC$  فيكون

\* بعدها عن كل واحدة من النقطتين  $B$  و  $C$  مساويا ربع محيط دائرة عظيمة وحينئذ

\* فتكون قطبا القوس الدائرة العظيمة  $ABC$  وزيادة على ذلك حيث ان بعد نقطة  $A$

\* عن كل واحدة من النقط  $H$  و  $D$  و  $E$  أقل من ربع محيط دائرة عظيمة بناء على انقطاب

\* الاقطاب  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  فيكون كثيرا الاضلاع  $ABC$  قطبيا

\* لكثيرا الاضلاع  $ABC$  بمعنى ان كثيرا الاضلاع  $ABC$  يمكن ايجاد من كثير

\* الاضلاع  $ABC$  بالطريقة التي استعملت لايجاد من كثيرا الاضلاع  $ABC$

\* برهان الثاني - يقال اذا ما القوس  $AB$  حتى يقابل القوسين  $AC$  و  $BC$  في

\* النقطتين  $P$  و  $Q$  فان الزاوية  $APQ$  تقاس بالقوس  $BC$  و  $APQ$  غير أن

$$AP + PQ = (AP + AQ) + (AQ - PQ) = BC + AC$$

\* تساوي ربعي محيط دائرة عظيمة أي تساوي قائمتين وهو المراد

\* نتيجة - يتوصل بهذه النظرية الى طريقة تغيير شكل على سطح الكرة وأما الشكلان

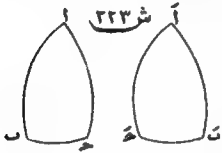
\*  $ABC$  و  $ABC$  فهما موجودان بحيث ان كل رأس من أحدهما يقابلها ضلع

\* من الآخر والعكس وحينئذ فيمكن اعتبار تسمية أحدهذين الشكلين بالآيل القطبي للثاني

\* تنبيه - وكان يمكن ايراد نظرية مقابلة لهذه في الباب الاول من هذا الجزء على الزوايا  
\* المجسمة الكثيرة الالوجه لا تختلف عنها الا في الصورة فقط

### دعوى نظرية

\* (٢٦٢) كل مثلث كروى متساوى الساقين زاويتياه المقابلتان لساقيه متساويتان  
\* وبالعكس (شكل ٢٢٢)



\* اذا كان الضلع  $ا ب = ا ح$  تكون زاوية  
\*  $ب = ح$  وبالعكس

\* برهان الاول - نضع بجانب المثلث  $ا ب ح$

\* ممائله  $ا ح ب$  ثم نطبقه عليه بأن نضع

\* الزاوية  $ا$  على مساويتها  $ا$  فتقع نقطة

\*  $ح$  على  $ب$  ونقطة  $ب$  على  $ح$  وينطبق حينئذ  $ب ح$  على  $ح ب$  (نتيجة ٢٥٠)

\* وينطبق المثلثان على بعضهما وتكون زاوية  $ب = ح$  وحيث كانت زاوية  $ب = ح$

\* تكون زاوية  $ب = ح$  وهو المراد

\* برهان الثاني - يقال أنه يسهل البرهنة على هذه النظرية بواسطة التطبيق غير أنه يمكن

\* البرهنة عليها أيضا بواسطة الابل القطعي فيقال اذا كان  $ا ب ح$  هو المثلث القطعي المثلث

\*  $ا ب ح$  فمن حيث أن الزاويتين  $ب$  و  $ح$  متساويتان يكون الضلعان  $ا ب$  و  $ا ح$

\* من المثلث القطعي متساويين وعلى مقتضى الحالة الاولى من هذه النظرية تكون زاوية

\*  $ب = ح$  وحيث أن هاتين الزاويتين متساويتان يكون الضلعان  $ا ب$  و  $ا ح$  من

\* المثلث  $ا ب ح$  القطعي للمثلث  $ا ب ح$  متساويين وهو المراد

### دعوى نظرية

\* (٢٦٣) يتساوى المثلثان الكرويان المرسومان على كرة واحدة أو على كرات متساوية اذا

\* وجد فيهما واحد من الامور الآتية

\* أولا - اذا تساوى من أحدهما زاوية والضلعان المحيطان بهما لنظائرهما من الثاني

\* ثانيا - اذا تساوى من أحدهما ضلع والزاويتان المجاورتان له لنظائرهما من الثاني

\* ثالثا - اذا تساوت فيهما الاضلاع الثلاثة المتناظرة

\* رابعا - اذا تساوت فيهما الزوايا المتناظرة

\* برهان الاول - يقال ينطبق أحد المثلثين على الآخر كما أجرى ذلك بنمرة (٢٢٢) أولا

\* برهان الثاني - يقال انه يمكن البرهنة على هذه النظرية بواسطة التطبيق غير انه يمكن ترجيعها الى الحالة الاولى بواسطة الآيل القطبي فيقال اذا كان  $\angle \alpha$  و  $\angle \beta$  المثلثين القطبيين للمثلثين  $\alpha$  و  $\beta$  الاصليين فن حيث انه يوجد في أحد المثلثين الاصليين ضلع ومجاوراته من الزوايا مساوية لتضاهيهما من الثاني يكون في أحد المثلثين القطبيين لهما زاوية والضلعان المحيطان بهما مساوية لتضاهيهما من المثلث القطبي الثاني وعلى مقتضى ما ذكر في الحالة الاولى يكون المثلثان القطبيين متساويين وينتج من تساويهما تساوى باقى الاجزاء فمهما أعنى أن الضلع والزائيتين المجاورتين له الباقيتين المثلث القطبي الاول مساوية لتضاهيهما من الثاني وهذا يستلزم تساوى باقى الاجزاء في المثلثين الاصليين وهو المطلوب

\* برهان الثالث - يقال (شكل ٢٢٤) نضع المثلث  $\alpha$  تحت المثلث  $\beta$



\* بحيث ينطبق الضلع  $\alpha$  على مساوية  $\beta$  فيتكون من ذلك الشكل الرابع  $\alpha$  و  $\beta$  فنصل بين  $\alpha$  و  $\beta$  بقوس دائرة عظيمة فالمثلث  $\alpha$  فيه الضلعان  $\alpha$  و  $\beta$  متساويان لان كل واحد منهما يساوى الضلع  $\alpha$  فتكون الزاويتان  $\alpha$  و  $\beta$  متساويتين وكذا ينتج من المثلث  $\alpha$  ان زاوية  $\alpha = \beta$  واذن فتكون زاوية  $\alpha = \beta$  لانهما مجموع زاويتين متساويتين (وقد يتأني أن يكونا فاصل زاويتين متساويتين) وبناء عليه يكون في أحد المثلثين زاوية والضلعان المحيطان بهما مساوية لتضاهيهما من الثاني فيكونان متساويين (أولا)

\* برهان الرابع - يقال انه يتوصل الى اثبات هذه النظرية بواسطة الآيل القطبي وذلك لانه حيث كانت الزوايا متساوية في المثلثين  $\alpha$  و  $\beta$  والمساويين فتكون أضلاع مثلثيهما القطبيين متساوية على التناظر وعلى مقتضى الحالة الثالثة تكون زواياهما متساوية غير أن تساوى الزوايا التناظر من المثلثين القطبيين يستلزم تساوى الأضلاع التناظرة في المثلثين الاصليين واذن فقد رجع الامر الى الحالة السابقة

\* تنبيه - اذا لم تكن الاجزاء المتساوية في المثلثين موضوعة على ترتيب واحد فمهما فى أى

- \* حالة من هذه الاحوال فيكون المثلثان المقروضان متماثلين وحينئذ فنجري البرهنة على
- \* أحدهما وعلى المماثل للثاني
- \* تنبيه ٢ - الاحوال الثلاثة الاولى من هذه النظرية تشتبك فيها المثلثات المستقيمة
- \* الاضلاع دون الحالة الرابعة لكلا الوأعنا النظر وكالم تحصل من تساوى الزوايا في المثلثات
- \* الكروية غير تناسب الاضلاع كافي المثلثات المستقيمة الاضلاع ثم لاحظنا ان نسبة الاقواس
- \* المتشابهة الى بعضها كنسبة انصاف أقطار دوائرها لرأينا ان تناسب الاضلاع يقتضي
- \* تساويها لتساوي انصاف أقطار دوائرها حيث ان اقيدنا تساوى المثلثات الكروية بانها تكون
- \* مرسومة على كرة واحدة أو على كرات متساوية فلهذا كان تساوى الزوايا في المثلثات الكروية
- \* قاضيا لتساوى أضلاعها

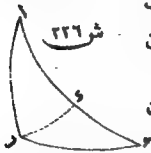
### دعوى نظرية

- \* (٢٦٤) الزاوية الخارجة من أى مثلث كروي أكبر من كل واحدة على حدة من الزاويتين
- \* الداخلتين من المثلث الا المجاورة لها (شكل ٢٢٥)
- \* ليكن المطلوب البرهنة على أن زاوية  $\alpha$  أكبر من  $\beta$
- \* لذلك نصل بين نقطة  $\beta$  ونمتصف  $\alpha$  بقوس الدائرة
- \* العظيمة  $\beta$  ثم نغده ونأخذ منه القوس  $\beta$  هو يساوي
- \*  $\beta$  ونصل قوس الدائرة العظيمة  $\beta$  الذي يقسم الزاوية
- \*  $\alpha$  الى قسمين
- \* فإذا قرن المثلثان  $\beta$  و  $\alpha$  نجد هما متماثلين لتساوى ضلعيين والزاوية المحصورة
- \* بينهما من أحدهما الضلعيين والزاوية المحصورة بينهما من الثاني مع اختلافها في ترتيب الوضع
- \* وينابع على ما تقدم تساوى فيهما باقي الاجزاء وتكون زاوية  $\beta = \alpha$  واذن تكون
- \* زاوية  $\alpha < \beta$  وهو المطلوب
- \* تنبيه - كان يمكن ايراد ما يقابل هذه النظرية في الباب الاول من هذا الجزء

### دعوى نظرية

- \* (٢٦٥) الضلع الاكبر من أى مثلث كروي تقابله الزاوية الكبرى وبالعكس (شكل ٢٢٦)
- \* أولا - ليكن الضلع  $\alpha > \beta$  ويطلب البرهنة على ان زاوية  $\beta < \alpha$

- \* لذلك يؤخذ من الضلع الأكبر  $\alpha$  الجزء  $\alpha\delta = \alpha\beta$  ثم نصل قوس الدائرة العظيمة ب  $\delta$
- \* فتكون زاوية  $\alpha\delta\beta =$  زاوية  $\alpha\beta\delta$  وحيث كانت
- \* زاوية  $\alpha\delta\beta$  خارجة عن المثلث  $\delta\beta\gamma$  فتكون أكبر من
- \* زاوية  $\delta\beta\gamma$  ومن باب أولى تكون زاوية  $\alpha\beta\delta < \delta\beta\gamma$
- \* ثانياً - لتكن زاوية  $\beta < \delta$  وطلب البرهنة على أن
- \*  $\alpha < \alpha\delta$



- \* وذلك لأنه إن لم يكن  $\alpha$  أكبر من  $\alpha\delta$  لكان مساوياً له أو أصغر منه وإذاً تكون زاوية
- \*  $\beta$  مساوية أو أصغر من زاوية  $\delta$  وهما ناتجتان مغايران للقرص فيكون  $\alpha < \alpha\delta$
- \* وهو المطلوب

### دعوى نظرية

- \* (٢٢٦) أي ضلع من أي مثلث كروي أصغر من مجموع الضلعين الآخرين (شكل ٢٢٧)
- \* يكفي أن نبرهن على أن الضلع الأكبر  $\delta$  أصغر من مجموع
- \* الاثنين الآخرين
- \* لذلك نأخذ الضلع  $\alpha\delta$  ونؤخذ عليه المقدار  $\alpha\delta = \alpha\beta$
- \* ثم نصل قوس الدائرة العظيمة ب  $\delta$  فالمثلث الحادث  $\alpha\delta\beta$
- \* يكون متساوي الساقين وتكون فيه زاوية  $\delta =$  زاوية
- \*  $\alpha\delta\beta$  وإذاً فتكون أصغر من زاوية  $\delta\beta\gamma$  وينبأ على
- \* ما تقدم (بمعة ٢٢٥) يكون الضلع  $\beta\delta$  أصغر من الضلع  $\delta\alpha$  من المثلث  $\delta\beta\alpha$
- \* أو أصغر من  $\delta\alpha + \alpha\delta$  أو من  $\delta\alpha + \alpha\beta$  وهو المراد
- \* تبعية - وبما ذكره نتج أن أي ضلع من المثلث الكروي أكبر من الفرق بين الضلعين
- \* الآخرين



### دعوى نظرية

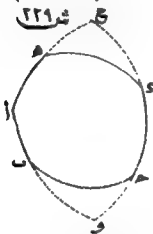
- \* (٢٢٧) مجموع أضلاع أي مثلث كروي أصغر من محيط دائرة عظيمة (شكل ٢٢٨)
- \* إذا كان  $\alpha\beta\delta$  المثلث المعلوم فانا نأخذ الضلعين  $\alpha\delta$  و  $\alpha\beta$  إلى أن يتلاقيا في
- \* نقطة  $\delta$  وبذلك يكون كل واحد من القوس  $\alpha\delta$  و  $\alpha\beta$  نصف محيط دائرة عظيمة



\* لكن  $ا ب + ا ح > ا ب + ا ح$  أو  $ا ب + ا ح > ا ب + ا ح$  أو  $ا ب + ا ح > ا ب + ا ح$  محيط دائرة عظيمة  
\* تنبيه - هذه النظرية والتي بعدها تقابلها نظرية  
\* (عمر ٢٤٣)

### دعوى نظرية

\* (٢٦٨) مجموع أضلاع أي مضلع كروي أقل من محيط دائرة عظيمة (شكل ٢٢٩)  
\* لذلك بعد الضلعان  $ا هـ$  و  $ح د$  المحاصران بينهما  
\* الضلع  $د هـ$  حتى يتلاقيا فيتوصل إلى المضلع كروي  
\* يتقص رأسا عن الأول غير أن محيطه أطول من محيط  
\* المضلع الأول وبعادة هذه العملية مرارا فأتوصل  
\* أخيرا إلى المثلث كروي محيطه أطول بكثير من محيط  
\* المضلع المعلوم  
\* نتيجة - نهاية طول محيط أي مضلع كروي محدب  
\* هو محيط الدائرة العظيمة المستعمل قاعدة لنصف الكرة المرسوم عليها هذا المضلع



### دعوى نظرية

\* (٢٦٩) مجموع زوايا أي مثلث كروي أكبر من قائمتين وأصغر من ست قوائم وإذا اضيف  
\* لاصغرها قائمتان كان الناتج أكبر من مجموع الزاويتين الآخرتين  
\* إذا دلت الحروف  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  على زوايا المثلث الثلاثة مرتبة على حسب ترتيب مقاديرها  
\* التصاعدي واعتبر المثلث القطبي له وكانت أضلاعه  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  مرتبة على حسب  
\* ترتيب مقاديرها التنازلية لأنها مكملات للزوايا  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  حدث  
\* أولا - حيث إن كل واحدة من الزوايا  $ا$  و  $ب$  و  $ح$  أقل من قائمتين يكون مجموعها  
\* أقل من ست قوائم وقد تقدم (٢٦٧) أن



- \*  $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma > \angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma$  أو  $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma < \angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma$  أو  $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma = \angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma$
- \* ثانياً - من المعلوم أن  $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma$  فيكون
- \*  $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma > \angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma$  أو  $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma < \angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma$  وهو المراد
- \* نتيجة - ينتج مما ذكر أن المثلث الكروي يمكن أن يكون فيه زاويتان قائمتان أو منفرجتان أو ثلاث زوايا قوائم أو منفرجة
- \* في حالة ما يكون الزاويتان  $\beta$  و  $\gamma$  قائمتين في المثلث الكروي تكون الرأس  $\alpha$  قطبا للقاعة  $\beta$  ويكون مقدار كل ضلع من ضلعي المثلث المحاطين بزاوية الرأس  $\alpha$  ربع محيط دائرة عظيمة
- \* وأما في حالة ما تكون الزوايا الثلاثة قائمة فإن مقدار كل ضلع من أضلاعه يساوي ربع محيط دائرة عظيمة ويقال لهذا المثلث قائم الزوايا الثلاثة
- \* إذا تصورنا تمرير محيط دائرة عظيمة وفرضنا أن  $\alpha$  و  $\beta$  قطبا ثم مررنا بالمستقيم المار بهما مستويين متعامدين فإن هذه المستويات الثلاثة المتعامدة تقسم سطح الكرة إلى ثمانية مثلثات كروية قائمة الزوايا الثلاثة وجميعها متساوية لتساوي أضلاعها بعضها واذن فالمثلث الكروي القائم الزوايا الثلاثة يعادل عن الكرة التي هو مركزها
- \* تنبيه - يمكن بواسطة نظرية (عمر ٢٦٨) استخراج نظرية أخرى تتعلق بمجموع زوايا المضلع الكروي بواسطة الأقطاب القطبية

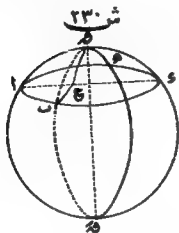
### دعوى نظرية

- \* (٢٧٠) قوس الدائرة العظيمة الذي مقداره دون نصف محيط الواصل بين نقطتين على سطح الكرة هو أقصر طريق بين هاتين النقطتين على سطحها
- \* والبرهنه على هذه النظرية مبنية على القائدين الآتيين

### القائدة الاولى

- \* البعد الأصغر بين قطب أي دائرة وبين جميع نقاط محيطها واحد (شكل ٢٣٠)
- \* إذا كان  $\alpha$  قطبا لمحيط الدائرة  $\alpha \beta \gamma$  ووصل بينه وبين كل واحد من النقطتين  $\beta$  و  $\gamma$  بقوس دائرة عظيمة وفرض أن  $\beta \gamma$  هو أصغر بعد بين القطبين  $\alpha$  وبين نقطة  $\beta$

\* وتصورنا دوران نصف الكرة الموجود على عيين الدائرة العظيمة  $\Gamma \Delta$  حول القطر  $\Gamma \Delta$  حتى تنطبق هذه الدائرة على الدائرة  $\Gamma \Delta$  فان قوس الدائرة العظيمة  $\Gamma \Delta$  ينطبق على مساوية  $\Gamma \Delta$  وينطبق نصف الكرة  $\Gamma \Delta$  انطباقا تاما على نصف الكرة  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  ولما كان الخط  $\Gamma \Delta$  لا يزال عند الانطباق دالاعلى أقصر بعدين  $\Gamma \Delta$  فيكون اذن هو أقصر بعدين  $\Gamma \Delta$



### الفائدة الثانية

\* اذا كان كل واحد من قوسي الدائرتين العظيمتين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  دون نصف محيط (شكل ٢٣١) وفرض ان  $\Gamma \Delta > \Gamma \Delta$  فاقول ان البعد الاصغر بين النقطتين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  أقل من البعد الاصغرين النقطتين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  والبرهنة على ذلك تعتبر نقطة  $\Gamma \Delta$  قطبا ونرسم منها محيط دائرة نصف قطر مساو  $\Gamma \Delta$  فتكون هذه الدائرة قاطعة ضرورة للقوس  $\Gamma \Delta$  في نقطة بين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  ثم اذا اعتبر القوس  $\Gamma \Delta$  انه أصغر طريق بين



\* النقطتين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  فانه يقطع المحيط  $\Gamma \Delta$  في نقطة  $\Gamma \Delta$  ويكون  $\Gamma \Delta$  أصغر طريق بين النقطتين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  لانه ان لم يكن كذلك ووجد أقصر منه فلا يكون  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  أصغر طريق بين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  وهو مخالف للقرض وحيث ان أقصر طريق بين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  مساو لأقصر طريق بين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  كما تقدم في الفائدة الاولى يكون أقصر طريق بين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  ان هو أقل من أقصر طريق بين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$



\* اذا قرر هذا يقال (شكل ٢٣٢) ليكن  $\Gamma \Delta$  قوسا من محيط دائرة عظيمة دون نصف محيط واصلا بين النقطتين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  فاذا فرض ان نقطة  $\Gamma \Delta$  الخارجة عن القوس  $\Gamma \Delta$  ادلى نقط البعد الاصغرين نقطتي  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  ووصل قوسا للدائرتين العظيمتين  $\Gamma \Delta$   $\Gamma \Delta$  وأخذ  $\Gamma \Delta$  يساوي  $\Gamma \Delta$  فعلى مقتضى ما ذكر (غرة ٢٦٦)

- \* يكون  $ab > a + b$  ثم اذا طرح من طرفي هذه المتباينة  $a$  و  $a$  المتساويان  
 \* يحدث  $ab > b$   
 \* لكنه حيث ان أقصر طريق بين  $a$  و  $b$  مساو لأقصر طريق بين  $a$  و  $b$  بناء على ما تقرر  
 \* في القائفة الاولى وكانت  $a$  احدى نقط أقصر طريق بين  $a$  و  $b$  فيكون القوس  $ab$   
 \* أصغر من أقصر طريق بين  $a$  و  $b$  وهو ناتج مسقط  $a$  على ما تقرر في القائفة الثانية حيث  
 \* قد ثبت ان  $b > a$  أكبر من  $a$  وحينئذ فلا يمكن وجود نقطة من نقط أقصر طريق  
 \* بين  $a$  و  $b$  خارجة عن القوس المذكور واذن فيكون هو عين القوس  $ab$   
 \* تنبيه - قد فرض في البرهان السابق ان كل واحد من القوسين  $a$  و  $b$  دون  $ab$   
 \* حيث لا يمكن أن يفرض خلاف ذلك لانه لو فرض ان  $a < ab$  فان أقصر طريق بين  
 \*  $a$  و  $b$  يكون أقل من أقصر طريق بين  $a$  و  $b$  وانن فلا يمكن أن تكون نقطة  $a$   
 \* موجودة على الخط الاول

## الفصل الثالث

في مساح المثلثات والمضلعات الكروية

### تعريف

- \* (٢٧١) حيث انه يمكن تطبيق أى جزء من سطح الكرة على أى جزء آخر منها كان من  
 \* الممكن أيضا مقارنة أى جزءين منها ولما كان المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة ثابت  
 \* المقدار بالنسبة لسطح الكرة (٢٦٩) فنعتبره اذن وحدة للسطح الكروية  
 \* ومن المعلوم أنه لا يمكن مقارنة مساحة أى جزء من سطح الكرة بمساحة المربع لان المستوى  
 \* مهما كان صغيره لا يمكن تطبيقه على سطح الكرة غير أن تكلم في الجزء الرابع كيف يمكن اجراء  
 \* تلك المقارنة  
 \* (٢٧٢) الشقة هي جزء من سطح الكرة محصورة بين نصفي دائرتين عظيمتين وزاوية  
 \* الشقة هي زاوية القوسين المحددتين لها

(٧) القصة البهية (ثالث)

## دعوى نظرية

\* (٢٧٣) النسبة بين أى شقتين كنسبة بين زاويتيها

\* وللبرهنة على ذلك يقال

\* أولاً - ان الشقتين المتساويتين زاويتيها كذلك وبالعكس

\* وذلك لان تساوى الشقتين يقتضى انطباقهما على بعضهما وبذلك تطبق زاوية احدهما

\* على زاوية الاخرى وأما اذا كان الزاويتان متساويتين فان زوجيتى الشقتين تكونان

\* متساويتين وبذلك تطبق الشقتان على بعضهما

\* ثانياً - اذا كان الشقتان متناسبتين وفرض ان النسبة بينهما كنسبة بين العددين ٣,٥

\* مثلاً ثم قسمت الشقة الاولى الى خمسة شقات متساوية والثانية الى ثلاثة متساوية وكل

\* واحدة منها مساوية لكل شقة من الشقات الخمس الاولى فان زاويتيها الزوجيتين

\* أو المستويتين تصير منقسمة الى زاويا متساوية الاولى الى خمسة والثانية الى ثلاثة وبناء عليه

\* يحصل هذا النسب

$$\frac{\text{شقة أ}}{\text{شقة ب}} = \frac{\text{زاوية أ}}{\text{زاوية ب}}$$

\* بفرض ان أ و ب يدلان على زاويتي الشقتين

\* ثالثاً - اذا كان الشقتان غير متناسبتين فانه يبرهن بعمل ما تقدم (بمرة ٨٠ جزء أول)

\* على ان النسبة بينهما هي كنسبة بين زاويتيها وهو المراد

\* نتيجة ١ - اذا فرض ان الشقة ب هي الشقة القائمة المقابلة للزاوية القائمة وحيدة

\* الزوايا المستوية أمكن أن يعبر عن هذا التناسب بان الشقة تقاس بزوايتها

\* نتيجة ٢ - وأما اذا اعتبرنا المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة وحيدة للسطوح

\* الكروية فمن حيث انه يساوى نصفها الشقة القائمة أمكن وضع التناسب السابق على هذه

\* الصورة بفرض ان م تدل على المثلث الكروى المذكور

$$\frac{\text{شقة أ}}{\text{م}} = \frac{\text{زاوية أ}}{\text{زاوية قائمة}} \quad \text{أو} \quad \frac{\text{شقة أ}}{\text{م}} = \frac{\text{زاوية أ}}{\text{زاوية قائمة}}$$

\* أعني ان الشقة تقاس في هذه الحالة بضعف زاويتها

\* هذا ولا بد من أن تذكر دائماً في المقدار الاول أن الشقة منسوبة للشقة القائمة وان زاويتيها

\* منسوبة للزاوية القائمة وأما في المقدار الأخير فإن الشق منسوبة للمثلث الكروي القائم  
\* الزوايا الثلاث وزاويتها منسوبة للزاوية القائمة

### دعوى نظرية

\* (٢٧٤) المثلثان الكرويان المتماثلان متكافئان (شكل ٢٢٠)  
\* ليكونا  $AB$  و  $A'B'$  مثلثين كرويين متماثلين و  $C$  قطب المثلث الأول فنصل  
\* بينه وبين مركز الكرة و بمستقيم ونعده حتى يقابل سطح الكرة في نقطة  $C'$  ومن حيث  
\* أن  $C$  هي قطب للمثلث  $AB$  أي أنها على أبعاد متساوية من النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$   
\* تكون  $C'$  قطبا للمثلث  $A'B'$  أي على أبعاد متساوية من النقاط  $A'$  و  $B'$  و  $C'$   
\* وذلك لأن  $C'A = C'B$  و  $C'A' = C'B'$  و  $C'A = C'A'$  أو خارجهما  
\* وبشاهد غير ذلك أن  $C$  و  $C'$  يوجدان أما داخل المثلثين  $AB$  و  $A'B'$  أو خارجهما  
\* في آن واحد  
\* إذا تقرر هذا يقال إن المثلث  $A'B'C'$  منقسم إلى ثلاث مثلثات متساوية الساقين ومتساوية  
\* إلى المثلثات الثلاثة للتقسيم إليها المثلث  $AB$  وأن فيكون المثلث  $A'B'C'$  مكانا  
\* للمثلث  $AB$  وهو المراد

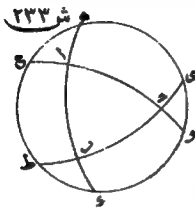
### قاعدة

\* (٢٧٥) إذا تقاطع قوسا دائرتين عظيمتين على نصف كرة فإن مجموع المثلثين الكرويين الحادتين  
\* من ذلك يكافئ شقة الزاوية التي يتقاطع فيها قوسا الدائرتين العظيمتين (شكل ٢٢٢)  
\* ليكن  $AB$  و  $A'B'$  قوسا دائرتين عظيمتين متقاطعتين في نقطة  $C$  على نصف الكرة  
\*  $A$  و  $A'$  قائل المثلث  $AB$  يكافئ المثلث  $A'B'C$  المماثل له غير أن  $A'B'C' + AB = A'B'C + A'B'$   
\* شقة  $C$  فيكون  $AB + A'B' = A'B'C + A'B'C'$  شقة  $C$  وهو المراد

### دعوى نظرية

\* (٢٧٦) مساحة المثلث الكروي تساوي الفرق بين مجموع زواياه وقائمتين (بفرض أن  
\* المثلث الكروي القائم الزوايا الثلاثة متحدة للسطوح الكروية والزاوية القائمة متحدة للزوايا  
\* المستوية) (شكل ٢٢٣)

\* ليكن دى ع محيط الدائرة العظيمة المعتبرة قاعدة لنصف الكرة المشغل على الثلث حيث  
 \* يفرض دائماً وجود الثلث على نصف كرة واحدة فإذا مدت أضلاع الثلث ب د و ا  
 \* و ا ب حتى تلاق محيط القاعدة فيحصل على مقتضى  
 \* القائمة السابقة ان



$$* \text{ ا ب د + ب د و + د ع ا ه = شقة ا و }$$

$$* \text{ ا ب د + ا ب ط ع + ع د ي و = شقة د و }$$

$$* \text{ ا ب د + ا د ح ي ه + ح د ط ب = شقة ب }$$

\* وجميع هذه التساويات على بعضها يحدث

$$* \text{ ا ب د + نصف كرة = شقة ا + شقة د + شقة ب أو }$$

$$* \text{ ا ب د = شقة ا + شقة د + شقة ب - نصف كرة }$$

\* غير ان اذا نسبنا تلك السطوح الى الثلث الكروى القائم الزوايا الثلاثة يحدث

$$* \text{ ا ب د م = شقة ا + شقة د + شقة ب - نصف كرة لكن الشقة القائمة }$$

$$* \text{ شقة ا } \frac{\text{زاوية ا}}{\text{شقة القائمة}} = \frac{\text{شقة د}}{\text{شقة القائمة}} = \frac{\text{زاوية د}}{\text{شقة القائمة}} , \text{ و }$$

$$* \text{ شقة ب } \frac{\text{زاوية ب}}{\text{شقة القائمة}} = \frac{\text{شقة ب}}{\text{شقة القائمة}} = \frac{\text{شقة ب}}{\text{شقة القائمة}} , \text{ و }$$

\* فيحدث

$$* \frac{\text{ا ب د}}{\text{م}} = \frac{\text{ا + ب + د - ر}}{\text{قائمة}} \text{ أو } \text{ا ب د} = \text{م} - \text{ا} - \text{ب} - \text{د} + \text{ر} \text{ وهو المطلوب}$$

\* مثال - اذا كانت ا = ١٠ ٧° و ب = ٢٠ ٦° و د = ٨٠ ٩° فيكون ا + ب + د

$$* \text{ ا + ب + د = ٣٠ ٢° وانن يكون }$$

$$* \frac{\text{ا ب د}}{\text{م}} = \frac{٣٠ ٣°}{٩٠} = \frac{١٨٣٠}{٥٤٠٠} = \frac{١}{٣} \text{ تقريباً أو } \frac{\text{ا ب د}}{\text{م}} = \frac{١}{٣}$$

\* وحيث ان م =  $\frac{1}{8}$  سطح الكرة فيكون ا ب د مساوياً الى  $\frac{1}{24}$  من سطح الكرة

## دعوى نظرية

- \* (٢٧٧) مساحة أى كثير أضلاع كروى تساوى الفرق بين مجموع زواياه وبين قوائم عددها بقدر عدد أضلاعه ناقصا اثنين مضروبا فى اثنين (شكل ٢٣٤)
- \* ليكن  $ا ب د ه$  شكلا كثيرا لأضلاع كرويا معلوما فإذا
- \* مررتا بنقطة  $ا$  وبكل واحد من النقطتين  $د$  و  $ه$  قوس
- \* دائرة عظيمة فإن الشكل ينقسم الى مثلثات كروية عددها
- \* مساو لعدد أضلاعه ناقصا اثنين وحيث ان مجموع زوايا المثلثات
- \* مساو لمجموع زوايا الشكل فتكون مساحة المضلع منسوبة
- \* الى المثلث الكروى القائم الزوايا الثلاث مساوية لمجموع زواياه ناقصا من القوائم بقدر ضعف
- \* عدد أضلاعه الاربع وهو المراد

- \* نتيجة ١ - اذا مررتا بالحرف  $س$  لسطح المضلع الكروى وبالرموز  $ا ب د ه ... الخ$
- \* لزواياه وبالرمز  $ن$  لعدد أضلاعه فتحصل

$$س = ا + ب + د + ه ... الخ - (٢ - ن) = (٢ - ن) = ا + ب + د + ه ... الخ - ٢ + ٢ = ٤$$

- \* نتيجة ٢ - اذا كان الشكل المعلوم مربعا كرويا وكان  $ا$  رمز الاحد رؤس حدث

$$س = ٤ - ا = ٤ - ١ = ٣$$

- \* ومن هنا يشاهد ان زاوية المربع الكروى تزيد عن القائمة

## الفصل الرابع

### فى الاقواس المتعامدة

## دعوى نظرية

- \* (٢٧٨) أى نقطة مفروضة خارج دائرة عظيمة يمكن أن يمر بها قوس دائرة عظيمة واحد
- \* عمودى على الاول لاثنتان (شكل ٢٣٥)
- \* ليكن  $ب د$  قوس الدائرة العظيمة المعلوم و  $ا$  النقطة المفروضة خارجة عنه

- \* برهان الاول - يقام من مركز الكرة و عمود على مستوى الدائرة العظيمة ب و يمر منه
- \* وينقطة ا مستوى قطع الكرة في الدائرة العظيمة ا
- \* العمودية على الدائرة العظيمة ب و وبذلك قد أمكن انزال
- \* قوس دائرة عظيمة عمودي على قوس الدائرة العظيمة ب و
- \* المفروض من نقطة ا
- \* برهان الثاني - يقال ان مستوى الدائرة العظيمة العمودي
- \* على الدائرة ب و يجب أن يشتمل أولاً على القطر العمودي
- \* على ب و وثانياً على نقطة ا وحيث انه لا يتأتى الا تمرير مستو واحد بهذا المستقيم
- \* وهذه النقطة فقد ثبت المطلوب
- \* تنبيه - ما ذكرنا من البرهنة هو بفرض ان نقطة ا ليست قطبا للقوس ب و

### دعوى نظرية

- \* (٢٧٩) اذا مد من نقطة خارج قوس دائرة عظيمة قوس دائرة عظيمة عمودي عليه وعدة
- \* أقواس دوائر عظيمة مائلة فانه يحدث
- \* أولاً - ان العمود أقصر من كل مائل
- \* ثانياً - المائلان اللذان افترعا عن موقع العمود بعد من متساويين متساويان
- \* ثالثاً - المائلان اللذان افترعا عن موقع العمود بعد من
- \* مختلفين أبعدهما أطول
- \* يسهل البرهنة على هذه النظريات وعلى عكسها أيضاً

### دعوى نظرية

- \* (٢٨٠) كل قطع من نقط قوس الدائرة العظيمة العمودي على وسط قوس دائرة عظيمة آخر
- \* على بعد من متساويين من نهاية هذا القوس الاخير وكل نقطة خارجة عنه فهي على بعد من
- \* مختلفين منهما
- \* وهذه نظرية يسهل البرهنة عليها وعلى عكسها أيضاً
- \* نتيجة - مستوى قوس الدائرة العظيمة المار عمودياً على وسط قوس الدائرة العظيمة الثاني
- \* يكون عموداً على وسط وتر هذا القوس الاخير وذلك لان خط تقاطع مستوي القوسين



- \* المذكورين ينصف هذا الوتر ويكون عمودا عليه. وكذا يكون المستوى العمودى المذكور
- \* محل النقط الفراغية المتساوية البعد عن نهايتى هذا الوتر

## دعوى نظرية

- \* (٢٨١) يتساوى المثلثان الكرويان القائم الزاوية اذا وجد فيهما واحد من الشرطين الاتيين
- \* أولا - اذا تساوى من أحدهما وتر وضع لنظيريهما من الثانى
- \* ثانيا - اذا تساوى من أحدهما وتر زاوية مجاورة لنظيريهما من الثانى والبرهنة عليهما سهلة
- \* تنبيه - اذا لم تكن الاجزاء المتساوية فى المثلثين موضوعة على ترتيب واحد كانا متماثلين

## الفصل الخامس

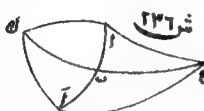
### فى الدوائر الصغيرة

- \* (٢٨٢) يتضح مما تقدم من النظريات أن قوس الدائرة العظيمة على الكرة هو بمثابة المستقيم على المستوى وأن قوس الدائرة الصغيرة عليها هو بمثابة قوس الدائرة عليه غير أن
- \* للدائرة الصغيرة مركزين ونصف قطر من واحد وانها اذا وصل بين نقطتين من قوس دائرة صغيرة بقوس من دائرة عظيمة فانه يكون وتر القوس الدائرة الصغيرة
- \* ولنكتف هنا بد كمنطوق بعض نظريات مشابهة لما تقدم ذكرها فى الباب الثانى من الجزء الاول دون البرهنة عليها السهولتها فنقول
- \* الاولى - قوس أى دائرة عظيمة لا يقابل أى دائرة صغيرة فى أكثر من نقطتين
- \* الثانية - القطر يقسم الدائرة الصغيرة الى قسمين متساويين
- \* الثالثة - كل وتر أصغر من القطر
- \* الرابعة - فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية الاقواس المتساوية أوتارها كذلك وبالعكس
- \* الخامسة - فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية القوس الاكبر يقابل الوتر الاكبر وبالعكس
- \* السادسة - قطب أى قوس ونصف وتره ونصفه فوجد فى مستوى دائرة عظيمة عمودى على الوتر

- \* السابعة - في دائرة صغيرة واحدة أو في دوائر صغيرة متساوية الأوتار المتساوية أبعادها عن المركز متساوية \*
- \* الثامنة - في دائرة صغيرة واحدة أو في دوائر صغيرة متساوية الأوتار المختلفان أقربهما من المركز أطول وبالعكس \*
- \* التاسعة - قوس الدائرة العظيمة العمودي على نهاية نصف قطر دائرة صغيرة يكون مماسا لمحيطها \*

### دعوى نظرية

- \* (٢٨٣) إذا اشترك محيطا دائرتين صغيرتين في نقطة خارجة عن الخط الواصل بين مركزيهما فإنه لا بد أن يكون لهما نقطة أخرى مشتركة مماثلة للأولى بالنسبة للخط الواصل بين المركزين (شكل ٢٣٦) \*



- \* ليكونا  $C$  و  $D$  مركزي الدائرتين و  $C$  و  $D$  قوس الدائرة العظيمة الواصل بينهما و  $A$  النقطة المشتركة بين المحيطين خارج  $C$  و  $D$  فإنه ينزل من هذه النقطة قوس الدائرة العظيمة  $AB$  عمودا على  $C$  و  $D$  ثم يدو يؤخذ عليه البعد  $BA = B$  فتكون نقطة  $A$  مماثلة لنقطة  $A$  ثم يوصل  $C$  و  $A$  و  $C$  و  $A$  و  $BA$  بأقواس دوائر عظيمة يحدث  $C$  و  $A$  لأن  $C$  و  $D$  عمود على وسط  $AA$  وهكذا يكون  $BA = BA$  وحينئذ فمحيط الدائرة الذي يمر بنقطة  $A$  لا بد أن يمر أيضا بنقطة  $A$  \*

\* نتيجة ١ - إذا اشترك محيطا دائرتين صغيرتين في نقطة واحدة أي إذا تماسا فإن نقطة تماسهما توجد على الخط الواصل بين المركزين

\* نتيجة ٢ - الدائرتان الصغيرتان اللتان يشتركان في نقطتين على الخط الواصل بين المركزين يتحدان معا

\* نتيجة ٣ - لا يمكن أن يشترك الدائرتان الصغيرتان في نقطتين تكون احدهما على الخط الواصل بين المركزين وثانيتهما خارجة عنه

## دعوى نظرية

- \* (٢٨٤) اذا اشتراك محيطا دائرتين صغيرتين في نقطتين كان الخط الواصل بين مركزيهما عمودا على وسط الوتر المشترك (شكل ٢٣٦) والبرهنة على ذلك يقال ان النقطتين المذكورتين لا يمكن أن تكونا على الخط الواصل بين المركزين (٢٨٣ نتيجة ٢) وكذا لا يمكن أن تكون احدهما عليه والاخرى خارجة عنه (٢٨٣ نتيجة ٣) وحيث ان كل واحد من مركزي الدائرتين متساوى البعد عن النقطتين المذكورتين فيوجد ان اذن على قوس الدائرة العظيمة العمودى على وسط قوس الدائرة العظيمة الواصل بينهما

## الفصل السادس

في بعض مسائل عليسة تطبيقية

## دعوى عليسة

(٢٨٥) المطلوب رسم قوس دائرة عظيمة يمر بنقطتين معلومتين (شكل ٢٣٧)



اذا كان النقطتان المعلومتان هما أ و ب فإنه يكفي لحل هذه المسئلة إيجاد القطب و لهاتين النقطتين ولذلك يركز في كل واحدة منهما ونصف قطر مساو لربع محيط دائرة عظيمة يرسم قوسان يتقاطعان في القطب و ثم يركز في القطب المذكور وبصين نصف القطر يرسم دائرة عظيمة فتمر بالنقطتين أ و ب المقروضتين

- \* تنبيه - الدائرتان العظيمتان اللتان مركزاهما أ و ب لا بد من تقاطعهما الا لما كان البعد المعام أ ب أقل من نصف دائرة عظيمة فهو أصغر من مجموع نصفي القطرين ولما كان زيادة على ذلك الفرق بين البعدين الآخرين مساويا للصفر فيكون أ ب أكبر من فاضلهما وان فيكون مجموع الابعاد الثلاثة أقل من محيط دائرة عظيمة

(٨) التحفة البهية (ثالث)

## دعوی علمیت

(٢٨٦) المطلوب تصنيف قوس دائرة عظيمة كانت أو صغيرة من سوم على سطح الكرة

۲۴۸

(شکل ۲۳۸)

حل هذه المسئلة يجب أن يعرف قوس الدائرة العظيمة الجامع  
لنقط المتساوية البعد عن نهايتي القوس المعلوم

والذلك مركز في النقطة  $ا$  و  $ب$  ونصف قطر مناسب يرسم قوسا دائرتين يتقاطعان في النقطة  $خ$   
 $ح$  و  $د$  من نقط المحل المطلوب فإذا أريد الآن تمرير قوس دائرة عظيمة بهاتين النقطتين فإنه  
يجري العمل كما سبق بفرقة ٢٨٥

## دعوى عملية

(٢٨٧) المطلوب غير من نقطة معلومة على سطح الكرة دائرة عظيمة عمودية على مستوى دائرة عظيمة معلومة (شكل ٢٣٩)

أولاً - إذا كانت الدائرة العظيمة المعروفة مرسومة بقلمها على سطح الكرة فانه يترك في نقطة أ ونصف قطر مساو ربع محيط دائرة عظيمة يرسم قوس دائرة يقطع الدائرة المعروفة في نقطة مثل ب تكون قطبا للدائرة العظيمة المطلوب تمررها من نقطة أ

شماره ۲۲۹ - ۱۰

لانه اذا تعامد دائرتان عظيمتان فقطب احدهما الى جسد  
 ضرورة على محيط الاخرى

ثانياً - إذا لم تكن الدائرة العظمية المعلومة هي سومة بنقلها فإنه يركز في نقطة أ ويصف قطر مناسب يرسم قوس يقطع القوس المعلوم في النقطتين هـ و ب المتساوي البعد عن نقطة أ ثم يمر بعد ذلك قوس الدائرة العظمية النصف للقوس هـ د كما تقدم بتمر ٢٨٦

## د عوی عملیہ

(٢٨٨) المطلوب تمثيل محيط دائرة على سطح الكرة عبر ثلاث نقاط معلومة عليه أ، ب، ج  
طريقة ذلك أن ترسم الدائرة العظمى الجامعة للنقط المتساوية البعد عن النقطتين أ، ب (٢٨٦)  
ثم ترسم أيضاً الدائرة العظمى الجامعة للنقط المتساوية البعد عن النقطتين ب، ج (٢٨٦)  
فستقاطع هاتان الدائرتان في قطب الدائرة أ ب ج المطلوبة

تنبيه - الدائرة العظيمة الجامعة للنقط المتساوية البعد عن النقطتين  $A$  و  $B$  تمر أيضاً بقطب الدائرة الصغيرة  $A$   $B$  ومن ذلك يمكن إيراد هذه النظرية  
إذا أقيم على أواسط أضلاع مثلث كروي دوائر عظيمة عمودية عليها فإنها تتقاطع في نقطة واحدة تكون مركزاً للدائرة المرسومة على المثلث المذكور

### دعوى علمية

(٢٨٩) إذا علمت نقطة خارج قوس دائرة عظيمة والمطلوب تقرير قوس دائرة عظيمة منها يصنع مع الاول زاوية معلومة (شكل ٢٤٠)

والوصول الى ذلك نفرض أن المسئلة محلولة وأن  $A$  هو القوس المطلوب



فإذا ركز في نقطة  $A$  ورسم قوس الدائرة العظيمة  $B$

ب نصف قطر مساوٍ ربع محيط دائرة عظيمة وأخذ عليه

بعد مساوٍ لقوس الزاوية المطلوبة فتتعين بذلك نقطة  $C$

فإذا وصل بينها وبين نقطة  $A$  بقوس دائرة عظيمة تكون الزاوية  $CAB$  هي الزاوية المطلوبة

## الفصل السابع

### تمارينات

- ١ - المطلوب قوس من دائرة عظيمة يمر سوم على سطح الكرة والمطلوب تكميل محيط الدائرة العظيمة الذي هو جزء منه
- ٢ - المطلوب البرهنة على أن نقطتي تماس المستويين المتوازيين المماسين لسطح الكرة هما نهايتا أحد أقطارها
- ٣ \* - المطلوب رسم المثلث الكروي إذا علم منه
- \* أولاً - أضلاعه الثلاثة
- \* ثانياً - زواياه الثلاثة
- \* ثالثاً - ضلعان والزاوية المحصورة بينهما
- \* رابعاً - ضلع والزاويتان المجاورتان له

## الباب الثالث في كثيرى السطوح

### الفصل الاول تعاريف

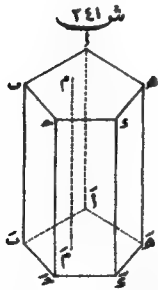
(٢٩٠) كثير السطوح هو جسم محاط من جميع جهاته بمضلعات مستوية تسمى أوجهه وأضلاع تلك الاشكال المستوية تسمى أحرفه ورؤسها هي رؤسه وكل حرف من هذه الاحرف يشترك بين وجهين بخلاف الرؤس فانها لا تشترك بين أقل من ثلاثة أوجه  
وحينئذ فاجزاء كثير السطوح هي الزوايا المجسمة والزوايا الزوجية والالواح والاحرف  
وتمتاز كثيرات السطوح عن بعضها بعدد أوجهها فان كان له أربعة أوجه وهو أقلها عدد يسمى  
هرما ثلاثياً وإذا الأربعة أوجه وهكذا  
(٢٩١) المنشور هو كثير السطوح المركب من جلة مستويات متقاطعة متنى في مستقيمتين متوازيين ومنتهية بمستويين متوازيين (شكل ٢٤١)

ومن هذا التعريف ينتج

أولاً - ان المستقيمتين  $AA'$  و  $BB'$  ... الخ المتوازيين المحصورة بين مستويين متوازيين متساوية

ثانياً - ان الاحرف  $AB$  و  $BC$  و  $CD$  و  $DE$  ... الخ هي مساوية وموازية على التناظر للاحرف  $A'B'$  و  $B'C'$  و  $C'D'$  و  $D'E'$  ... الخ

وبناء عليه يكون الشكلان  $ABCD$  و  $A'B'C'D'$  متساويين لتساوى الاضلاع والزوايا المتناظرة فيهما ويسميان قاعدتي المنشور



المستقيم  $MM'$  الذي يقدر به البعد الكائن بين القاعدتين يسمى ارتفاع المنشور المنشور يكون قائماً ومائلاً على حسب ما تكون أحرفه الجانبية عمودية أو مائلة على مستويي

القاعدتين غيران المنشور القائم تكون فيه الاشكال المتوازية الاضلاع الجانبية مستطيلات ويكون أحد أحواف ارتفاعه

(٢٩٢) متوازي السطوح هو منشور قاعدته شكلان متوازي الاضلاع فاذا كان قائما وقاعدته مستطيلين فإنه يسمى بمتوازي المستطيلات

(٢٩٣) المكعب هو متوازي مستطيلات قاعدته شكل مربع وارتفاعه مساو أحد أحواف قاعدته ومن هذا التعريف ينتج ان أوجه المكعب هي مربعات متساوية

(٢٩٤) الهرم هو جسم محدد بخلق مستو  $AB$  و  $CD$  وبجمله مثلثات قواعد الاضلاع المختلفة لهذا المضلع ورؤسها مجمعة في نقطة واحدة من خارج المضلع المذكور (شكل ٢٤٢)

وتسمى نقطة  $S$  برأس الهرم وأما المضلع  $ABCD$  فيسمى قاعدته والعمود  $SO$  النازل من رأسه الى قاعدته يسمى ارتفاع الهرم وتمتاز الاهرامات عن بعضها بعدد أوجهها المحيطة بالرأس أو بعدد اضلاع شكل قاعدته فمما كانت قاعدته مثلثا يسمى هرم ثلاثي ومما كانت قاعدته شكلارباعيا يسمى هرمارباعيا وهكذا الهرم المنتظم ما كانت قاعدته شكلا منتظما وكان مركزها موقع العمود النازل من رأسه عليها



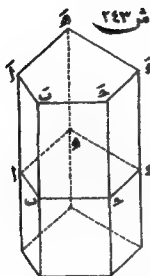
(٢٩٥) كثير السطوح المخدب هو الذي يوجد بقلمه في إحدى جهتي امتداد أي وجه من أوجهه ولم تسلك هذا الاعلى كثيرات السطوح المخدبة وينتج من تعريف الشكل المخدب أن المستقيم لا يمكن أن يقطعه في أكثر من نقطتين

## الفصل الثاني

في اللبادي

### دعوى نظرية

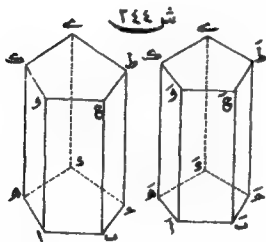
(٢٩٦) اذا قطع المنشور بمستويات متوازية فان القطاعات الحادثة تكون مضلعات مستوية متساوية (شكل ٢٤٣)



إذا كان المستويان القاطعان هما  $أ ب ح د هـ$  و  $أ ت ح ذ هـ$  فالمستقيمان  $أ ب$  و  $أ ت$  يكونان متوازيين لأنهما خطا تقاطع مستويين متوازيين مستويين تلك وحيث أنهما محصوران بين مستويين متوازيين فيكونان متساويين أيضا وبناء عليه فكثيرا الاضلاع  $أ ب ح د هـ$  و  $أ ت ح ذ هـ$  متساويان لتساوي أضلاعهما وزواياهما التناظرة الموضوعة على ترتيب واحد

### دعوى نظرية

(٢٩٧) يتساوى المنشوران إذا تساوى من أحدهما الوجة الثلاثة المركبة لاجدى زواياه الجسمة لنظائرهما من الثاني وكانت موضوعة على ترتيب واحد (شكل ٢٤٤)



إذا كانت الوجة الثلاثة المركبة للجسمتين الثلاثيتين  $أ$  و  $أ$  متساوية وكانت موضوعة على ترتيب واحد بأن كان

$$أ ب ح د هـ = أ ت ح ذ هـ \text{ و } أ ب ح و$$

$$= أ ت ح و \text{ و } أ هـ ك و = أ هـ ك و$$

فإننا نبرهن على إمكان انطباق أحدهما الجسمين على الآخر انطباقا تاما

وإننا نضع المنشور الثاني على الاول بأن نطبق

القاعدة  $أ ب ح د هـ$  على مساويتها وحيث إن الجسمتين  $أ$  و  $أ$  متساويتان (٢٤٠ ثالثا) فيأخذ الحرف  $أ$  و الاتجاه  $أ$  و حيث أنهما متساويان فتقع نقطة  $و$  على نقطة  $و$  وبعد انطباق  $أ و$  على  $أ و$  تنطبق باقي أحرف المنشور الثاني  $ب ح د هـ$  و  $ح ط و$  ... الخ على نظائرهما من الاول وبذلك ينطبق المنشوران على بعضهما ويتساويان

نتيجة - إذا كان المنشوران قائمين فانه يكفي في تساويهما حصول التساوي بين قاعدتيهما وارتفاعيهما لأن ذلك كفى لانطباق أحدهما المنشورين على الثاني



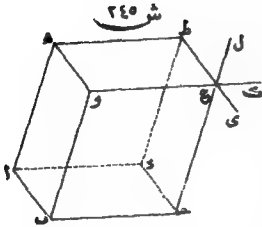
## دعوى نظريه

(٢٩٨) كل متوازى سطوح يكون فيه

أولاً - الواجه المتقابلة متساوية ومتوازية

ثانياً - الزوايا الزوجية المتقابلة متساوية

ثالثاً - الزوايا المجمة الثلاثية المتقابلة متماثلة (شكل ٢٤٥)



برهان الاول يقال - أما القاعدتان  $ABCD$  و  $EFGH$  فهما على مقتضى تعريف متوازي

السطوح متساويتان ومتوازيتان وأما الوجهان

$ABFE$  و  $DCGH$  فهما الضلعان

$AB$  و  $DC$  متساويان ومتوازيان لانهما

ضلعان متقابلان من الشكل المتوازي الاضلاع

$ABCD$  والضلعان  $BF$  و  $CH$  كذلك

لانهما من متوازي الاضلاع  $BCFE$  والضلعان

$BC$  و  $FE$  كذلك أيضاً لانهما من متوازي الاضلاع  $BCFE$  وبما عليه فيكونان

متوازيين ومتساويين وبمثل ذلك يبرهن على وازي وتساوي الوجهين  $BCFE$  و  $ADEH$

برهان الثاني يقال - أما الزوجيتان  $AB$  و  $DC$  فهما متساويتان لانهما متساويتان

عمودياً على حرقهما فانه يقطع وجهي كل واحد منهما في مستقيمين يتكون بينهما زاويتا

المستوية وتوازي أضلاع الزاويتين المستويتين للذ كورتين ومضادتهما في الجهة تكونان

متساويتين وبمثل ذلك يبرهن على تساوي باقي الزوجيات

برهان الثالث يقال - ان الجسمين الثلاثيتين  $ABCD$  و  $EFGH$  نجد انهما مركبتان من اجزاء

متساوية غير انهما موضوعة على ترتيب منعكس لانهما لهما نفس الحرف المجمة  $C$  على استقامتها

فانه يتشكل منها زاوية مججمة متساوية للججمة  $A$  لتركب من اجزاء متساوية موضوعة على

ترتيب واحد

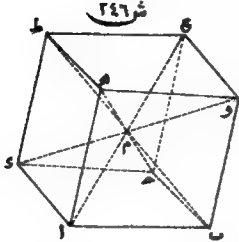
نتيجة - يمكن اعتبار اى وجهين متقابلين من متوازي السطوح كأنهما قاعدتان له

تنبيه - في الحالة ان خصوصية التي يكون فيها متوازي السطوح قائماً يكون في كل واحدة من

الجسمتين  $A$  و  $C$  زاويتان مستويتان قائمتان وبذلك يمكن انطبقهما على بعضهما

## دعوى نظرية

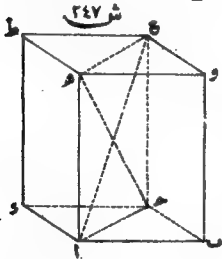
(٢٩٩) أقطار متوازي السطوح الاربعة تنصف بعضها (شكل ٢٤٦)



ليكن  $ا ب ح د ه و ط$  متوازي السطوح  
المعلوم فاذا اعتبرنا القطرين  $ا ح$  و  $ه و$  ووصلنا  
 $ح ه$  و  $ا د$  نرى ان الشكل  $ا ح ه$  متوازي  
أضلاع لان الضلعين  $ا ه$  و  $ح ه$  متوازيان  
ومتساويان وحينئذ فقطراه ينصفان بعضهما  
وعمل ذلك يبرهن على باقى الاقطار

تنبيه ١ - نقطة تقابل الاقطار تسمى أحيانا  
مركز متوازي السطوح

تنبيه ٢ - أقطار متوازي المستطيلات متساوية ومربع أحدها يساوى مجموع مربعات  
الأحرف الثلاثة المجتمعة معه فى إحدى الرأسين  
الواصل هو بينهما (شكل ٢٤٧)



برهان الأول - اذا اعتبرنا القطرين  $ا ح$  و  $ه و$   
فجدانهم متساويان لان الشكل  $ا ح ه$   
مستطيل

برهان الثانى - يؤخذ من المثلث القائم الزاوية  
 $ا ح ه$  ان

$$\overline{ا ح} = \overline{ا د} + \overline{د ح} = \overline{ا ح} + \overline{ا ه}$$

لكن  $\overline{ا ح}$  من المثلث القائم الزاوية  $ا ب ح$  مساو  $\overline{ا ب} + \overline{ب ح}$  أو مساو  $\overline{ا ب} + \overline{ا د}$   
واذن يكون

$$\overline{ا ح} = \overline{ا ب} + \overline{ا د} + \overline{ا ه}$$

وهو المراد

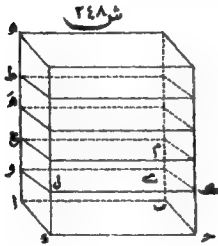
## الفصل الثالث

في قياس حجم متوازي السطوح

(٣٠٠) اذا اعتبرنا حجم المكعب المتشاعلى وحدة الاطوال وحدة للاحجام فيكون حجم أى كبير مسطح هو النسبة الكائنة بين حجمه وحجم ذلك المكعب المعتبر وحدة

### دعوى نظرية

(٣٠١) النسبة بين متوازي المستطيلات المتحدين في القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما (شكل ٢٤٨)



لنفرض اولاً وجود مقياس مشترك بين الارتفاعين

$$ا هـ و ا هـ بحيث يكون مثلاً  $\frac{ا هـ}{ا هـ} = \frac{و}{هـ}$$$

فإذا تصورنا هر ور مستويات موازية للقاعدتين

نقط تقاسيم الارتفاعين فان متوازي المستطيلات

الاول يتقسم الى خمسة متوازيات المستطيلات

متساوية لاحتدادها في القاعدة والارتفاع وأما

الثاني فانه يتقسم الى ثلاثة فقط متساوية أيضاً

وحينئذ اذا رمزنا بالرمزين ع و ح لجمعي الجسمين نحصل  $\frac{و}{ع} = \frac{ع}{ح}$

ومن هذا التناسب والسابق يحدث

$$\frac{ع}{ع} = \frac{ا هـ}{ا هـ} = \frac{ع}{ع}$$

بفرض ان ع و ح يدلان على الارتفاعين

وأما اذا لم يوجد بين الارتفاعين مقياس مشترك فانه يبرهن كما سبق (بنقرة ٨٠ جزء أول) على ان

النسبة بين جمعي الجسمين المذكورين على أى حالة كانت هي كالنسبة بين ارتفاعيهما

تنبيه - يطلق على الاحرف الثلاثة الخارجة من رأس واحدة من رؤس متوازي المستطيلات

اسم ابعاد الجسم ومتى علمت هذه الابعاد فان متوازي المستطيلات يتعين تعيينها تماماً

وحيث قد علم مما تقدم انه يمكن اعتبار قاعدة الجسم المذكور أى وجه من أوجهه أمكن التعبير

عن منطق النظرية السابقة بهذه العبارة الآتية

النسبة بين متوازي المستطيلات المتحدين في بعدين من ابعادهما الثلاثة كالنسبة بين بعديهما

الثالثين

## دعوى نظرية

(٣٠٢) النسبة بين متوازي المستطيلات المتعدين في الارتفاع كالنسبة بين قاعدتهما إذا كان متوازي المستطيلات المعطيان هما  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}$  وأبعاد الأولى هي  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{C}$  وأبعاد الثانية هي  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  واعتبرنا الوجهين  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  و  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  قاعدتين لهما فيكون ارتفاعهما المشترك

ثم إذا اعتبرنا متوازي مستطيلات ثالث  $\mathcal{C}$  وأبعاده  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{C}$  وقارناه بمتوازي المستطيلات السابقين نحصل على مقتضى النظرية السابقة أن

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \quad \text{و} \quad \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \quad \text{أو} \quad \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \times \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$$

وقد علم في الباب الأول من الجزء الثاني أن الحاصل  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \times \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}}$  يدل على النسبة الكائنة بين مستطيلين بعد أحدهما  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  وبعد الثاني  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  فإذا رمزنا لهذين السطحين بالرمزين  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}$  أمكن أن يكتب  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$  وهو المراد

نتيجة - إذا فرضنا تقدير الأبعاد  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{C}$  بأعداد إذا كان  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \times \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}}$  وحيت قد يمكن التعبير عن منطوق النظرية المتقدمة بالطريقة الآتية النسبة بين متوازي المستطيلات المتعدين في بعد واحد كالنسبة بين حاصل ضرب بعدهما الآخر

## دعوى نظرية

(٣٠٣) النسبة بين أي متوازي المستطيلات كالنسبة بين حاصل ضرب قاعدة الأول في ارتفاعه إلى حاصل ضرب قاعدة الثاني في ارتفاعه

فإذا كان  $\mathcal{C}$  و  $\mathcal{C}$  متوازي المستطيلات المعطيان وأبعاد الأولى هي  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{C}$  وأبعاد الثانية هي  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{C}$  وفرض متوازي مستطيلات ثالث  $\mathcal{C}$  وأبعاده  $\mathcal{A}$  و  $\mathcal{B}$  و  $\mathcal{C}$  وقارناه بكل واحد من المعطيان فإنه يحصل على مقتضى النظريتين السابقتين هذان التماسان

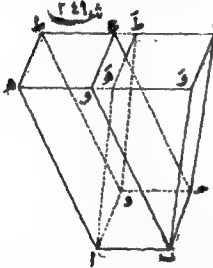
$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \quad \text{و} \quad \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \times \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}} \quad \text{أو} \quad \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \times \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}} \times \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}}$$

ثم إذا فرض تقويم الأبعاد بأعداد أمكن أن يكتب  $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}} \times \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}} \times \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}}$

نتيجة - اذ افرض ان  $\epsilon$  هو المكعب المختار ووحدة الاجسام فتكون ابعاده  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  وحدة الاطوال المرموز له بحرف  $\lambda$  وحينئذ يكون  $\frac{\epsilon}{\lambda} = \frac{\alpha}{\lambda} \times \frac{\beta}{\lambda} \times \frac{\gamma}{\lambda}$  وحيث ان المقادير  $\frac{\epsilon}{\lambda}$  و  $\frac{\alpha}{\lambda}$  و  $\frac{\beta}{\lambda}$  و  $\frac{\gamma}{\lambda}$  تدل على مقاس الكميات  $\epsilon$  و  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  امكن ان يقال لقياس حجم متوازي المستطيلات بضرب مقاسات ابعاده الثلاثة في بعضها ومن جهة أخرى حيث ان الحاصل  $\frac{\alpha}{\lambda} \times \frac{\beta}{\lambda}$  يدل على مقاس القاعدة ( $\alpha$  و  $\beta$ ) امكن ان يقال ايضا لقياس حجم متوازي المستطيلات بضرب مقاس قاعدة في مقاس ارتفاعه تنبيه - يجب أن يتذكر دائما ان منطوق هذه النظرية يقضى أن يكون وحدة السطوح هو المربع المتساخلى ووحدة الاطوال ووحدة الاجسام هو المكعب المتساخلى ووحدة الاطوال

### دعوى نظرية

(٣٠٤) متوازي السطوح المقصودان في قاعدة واحدة وقاعدتاها الاخرى ان في مستو واحد ومحصورتان بين مستقيمين متوازيين يكونان متكافئين (شكل ٢٤٩)



ليكن  $أ ب ح د$  هو  $ط هـ و ز$  و  $أ ب ح د$  هو  $ط هـ و ز$   $ط$  متوازي السطوح العلويين المتحدين في القاعدة السفلى  $أ ب ح د$  وقاعدتاها العليا  $ط هـ و ز$  و  $هـ و ز ط$  و  $هـ و ز ط$  في مستو واحد ومحصورتان بين المستقيمين المتوازيين  $هـ و$  و  $ط هـ$  نعتبر في الشكل الكلي المشورين الثلاثين

$هـ أ هـ ط$  و  $ط هـ و ز$  و  $هـ و ز ط$  فبشاهد فبما ان الجسمين الثلاثيين  $هـ و$  و  $هـ أ هـ ط$  ثلاثة أوجه متساوية النظر لنظيره وموضوعة على ترتيب واحد

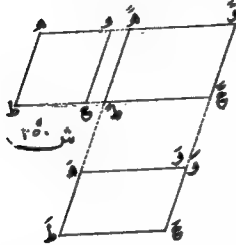
وبيانها المثلث  $هـ أ هـ$  = المثلث  $و ب و$  و تساوى وتوازي اضلعها المتساوية

والوجه  $هـ أ ط$  = الوجه  $و ب ح$  لكونهما وجهين متقابلين من متوازي سطوح واحد والوجه  $هـ ط ز$  = الوجه  $و هـ ح$  لاشتراكهما في الجزء  $هـ ط$  و تساوى الجزأين الباقيين منهما للقاعدة المشتركة  $أ ب ح د$  وحينئذ فالمتشوران الثلاثيان المذكوران متكافئان لكنه اذا طرحنا من الشكل الكلي المتشور الثلاثي الاول كل الباقي هو متوازي السطوح الثاني

وإذا طرحنا المنشور الثاني كان الباقي هو متوازي السطوح الاول وبناه عليه متوازي السطوح  
مكافئان

### د عوى نظرية

(٣٠٥) متوازي السطوح المتصان في القاعدة والارتفاع متكافئان (شكل ٢٥٠)



حيث قد فرض اتحاد متوازي السطوح ع و ح في القاعدة السفلى أ ب د ع وفي الارتفاع فتكون قاعدتا هـ ا هـ ا عليان ضرورة في مستوى واحد مواز للقاعدة أ ب د ع فان كانتا مع ذلك محصورتين بين مستقيمين متوازيين ثبت المطلوب (٣٠٤) والافند هـ و ع ط و هـ ط و ع فيشكل من ذلك شكل متوازي الاضلاع هـ و ع ط مساو ومواز للقاعدة أ ب د ع

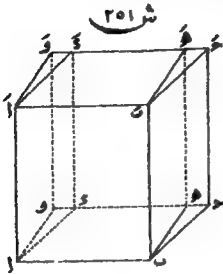
وذلك لانه حيث كان هـ و مساويا وموازيا هـ و فيكون مساويا وموازيا أ ب وكذلك حيث كان هـ ط مساويا وموازيا هـ ط فيكون مساويا وموازيا أ د وحينئذ فيمكن اعتبار هـ و ع ط كانه قاعدة علوية لمتوازي سطوح ثالث ع مشترك مع الاولين في القاعدة السفلى أ ب د ع

وإذا قارنا متوازي السطوح الأخير ع بكل واحد من متوازي السطوح ع و ح نشاهد على مقتضى النظرية السابقة انه يكافئ كل واحد منهما وان فهم امتكافئان نتيجة - كل متوازي سطوح مماثل يمكن تحويله الى آخر قائم بكافئته متصمعه في القاعدة والارتفاع وذلك لانه اذا اقيمت من رؤس القاعدة السفلى أعمدة عليها ومدت حتى تلاقى مستوى القاعدة العليا فانه يتشكل من ذلك متوازي سطوح قائم متصمعه الاول في القاعدة والارتفاع وبنا على النظرية السابقة يكون مكافئا للاول

### د عوى نظرية

(٣٠٦) كل متوازي سطوح قائم يمكن تحويله الى متوازي مستطيلات ككافئته متصمعه في الارتفاع وقاعدتا هـ ا هـ ا عليان (شكل ٢٥١) ليكن أ ب د ع و أ ب د ع متوازي

السطوح القائمة على مقتضى القرض تكون قاعدة نامشكين متوازي الاضلاع وأما أوجهه فهي مستطيلات



فإذا اعتبرنا الوجهين المتقابلين  $أ ب آ$  و  $د د$  من متوازي السطوح فاعدتين له واقيم من النقط  $ا و ب$  و  $آ و ب$  أعمدة على القاعدة  $أ ب آ$  فتتضمن هذه الأعمدة بين مستويي القاعدتين وتكون أعمدة على الحرفين  $أ ب$  و  $آ$  ثم اذا وصل  $ه ه$  و  $و و$  فإنه يتكون متوازي مستطيلات يكافئ متوازي السطوح القائم (٢٥٤)

ونشاهد غير ذلك ان القاعدة  $أ ب د$  قد استعوضت بالمستطيل  $أ ب ه$  المكافئ لها وأما الارتفاع  $ا آ$  فهو باق على حاله وبذلك ثبت المطلوب

نتيجة - ينجم مما ذكر أن مساحة متوازي السطوح تساوي حاصل ضرب مقياس قاعدته في مقياس ارتفاعه لانه يكافئ متوازي المستطيلات المتقدمه في القاعدة والارتفاع

تنبيه - من المعلوم ان المساحة السطحية الجانبية لمتوازي سطوح معلوم عبارة عن مجموع مساح الواجه الجانبية له وحيث ان كل وجهين متقابلين فيمتساويان فيؤخذ ان ضعف مساحة وجهين متجاورين منه ويضمن الى بعضهما

فإذا دل  $ا و ب$  على ضلعين متجاورين من قاعدته  $ع و ع$  على ارتفاعي المستطيلين المتجاورين المشكلين عليهما  $و س$  على المساحة الجانبية فتحصل

$$س = (ع ا + ع ب) ع$$

واذا اردضم مساحتي القاعدتين العليا والسفلى الى هذه المساحة وفرض أن  $د$  يدل على ارتفاع القاعدة تحدث

المساحة السطحية الكلية  $= (ع ا + ع ب) د + (ع ا + ع ب) د$  أما في حالة ما يكون الجسم متوازي سطوح قائماتان  $ع و ع$  يكونان متساويين للعرف الثالث  $د$  ويؤلف القانون المتقدمان الى

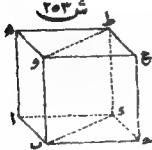
$$س = (ا + ب) د \times د \text{ و المساحة السطحية الكلية } = (ا + ب + د) د$$





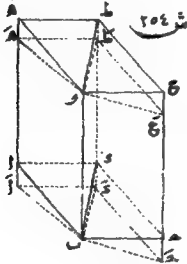
## دعوى نظرية

(٣٠٨) المستوى المار بمحورين متقابلين من متوازي السطوح يقسمه الى منشورين ثلاثيين متكافئين



أولاً - اذا كان متوازي السطوح قائماً مثل ا ب ح د ه و ط (شكل ٢٥٣) فانه يسهل البرهنة على تكافؤ المنشورين الثلاثين ا ب د ه و ط و د ب ح و ط و ح القائين المنقسم اليهما بالمستوى ط و د وذلك لاتحادهما في الارتفاع ح و ولتساوي قاعدتيهما الامكان انطباقهما على بعضهما بعد الدوران

ثانياً - اذا كان متوازي السطوح المعلوم ماثل مثل ا ب ح د ه و ط (شكل ٢٥٤)



فانها تنعذر البرهنة على تكافؤ المنشورين الثلاثين ا ب د ه و ط و د ب ح و ط و ح المنقسم اليهما بمتوازي السطوح واسطة التطبيق كما في الحالة الاولى غير اننا نبرهن على التكافؤ بالطريقة الآتية

نحرف بالنقطتين ب و مستويين عموديين على الحرف ب و فيكونان عموديين على جميع أحرف متوازي السطوح ويقطعان في النقط أ و د و ح و ه و ط و ع وحيث ان الواجه المتقابلة من متوازي السطوح

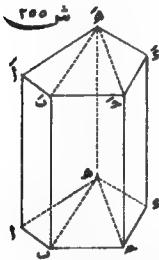
متوازية يكون أ د موازيا ب ح و أ ب موازيا ح د و ه و موازيا ع ط و د ح موازيا ه ط واذن فيكون القطعان شكلين متوازي الاضلاع ومثلهما باقي الواجه وحيث انهما عمودان على الحرف ب و فيكونان متوازيين وعلى مقتضى ما نقرر (بنقرة ٢٩٦) يكونان متساويين وبناء عليه يكون الجسم الحادث منشوراً وهو قائم لكون الحرف ب و عموداً على مستوى القاعدة

اذا نقرر هذا ولا حظنا ما ذكر (بنقرة ٣٠٧) من أن أى منشور يكافئ منشوراً قائماً قاعدته القطع العمودي على أ ح فمواز ارتفاعه طول ح فمجد من جهة أن المنشور ا ب ح د ه و ط يكافئ المنشور القائم ا ب ح د ه و ط ومن جهة أخرى أن كل واحد من المنشورين الثلاثين ا ب د ه و ط و د ب ح و ط و ح يكافئ المنشور القائم الثلاثي المناظر له وحيث ان المنشورين الثلاثين الثنائين متكافئان كما ذكر أولاً فيكون المائلان كذلك وهو المطلوب

نتيجة ١ - مساحة المنشور الثلاثي تساوى حاصل ضرب مقاس قاعدته في مقاس ارتفاعه وذلك لأنه لما كان متوازي السطوح يتركب من منشورين ثلاثين متكافئين متصدين معه في الارتفاع ومجموع قاعدتيهما مساو لقاعدته كانت مساحة أيهما تساوى نصف مساحة متوازي السطوح فإذا دلت  $ق$  على قاعدته المنشور الثلاثي ودل  $ع$  على ارتفاعه تكون مساحة متوازي السطوح مساوية  $ق \times ع$  وتكون مساحة المنشور الثلاثي مساوية إلى

$$ق \times ع = ع \times ق \times \frac{1}{3}$$

نتيجة ٢ - مساحة أي منشور تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه (شكل ٢٥٥)



وذلك لأنه يمكن تقسيمه بواسطة المستويات القطرية  $هـ-ج-هـ$  و  $هـ-ب-هـ$  إلى منشورات ثلاثية متصدة معاً في الارتفاع وحيث أن مساحة كل واحد منها تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه وإن مجموع قواعدهما عبارة عن قاعدة المنشور فيكون مجموع هذه المساحات أو المساحة المطلوبة مساوية حاصل ضرب قاعدة المنشور في ارتفاعه

نتيجة ٣ - ويمكن أخذ مساحة المنشور أيضاً بواسطة ضرب طول حرفه في القطع العمودي عليه كافي مرة (٣٠٥)

تنبيه - المساحة السطحية الجانبية للمنشور تساوى مجموع مساحات أوجهه المتركب هو منها وفي حالة ما نطلب المساحة السطحية الكلية للمنشور فإنه يضم إلى ما سبق مساحة القاعدتين

## الفصل الخامس

في قياس الهرم

### دعوى نظرية

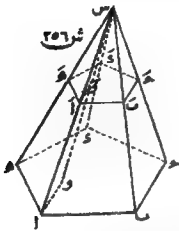
(٢٠٩) إذا قطع الهرم مستواً موازاً لقاعدته فإن أحرفه وارتفاعه تقسم به إلى أجزاء متناسبة ويكون شكل القطع مشابهاً للقاعدة (شكل ٢٥٦)

إذا كان  $س-ب-ج$  هـ هـ هـ ما  $أ-ب-ج$  د هـ قطعاً موازياً لقاعدته و  $س$  و  $و$  و  $س$  ارتفاع الهرمين الكلي والصغير وتصور غير مستوي بالحرف  $س$  و  $أ$  وبالارتفاع  $س$  و  $و$  فإنه يقطع القاعدة والقطع في المستقيمين  $أ$  و  $و$  المتوازيين ثم إذا لاحظنا بعد ذلك

أن المستقيمت  $اَبَ$  و  $بَ حَ$  و  $حَ دَ$  و  $دَ هَ$  و ... الخ موازية بالناظر للمستقيمت  
 $اَبَ$  و  $بَ حَ$  و  $حَ دَ$  و  $دَ هَ$  و ... الخ نرى أن  
 المثلثات  $س اَبَ$  و  $س بَ حَ$  و  $س حَ دَ$  و ... الخ  
 متشابهة للمثلثات  $س اَبَ$  و  $س بَ حَ$  و  $س حَ دَ$  و ... الخ  
 و بنا على هذا سلسلة التناسبات الآتية

$$\frac{س اَبَ}{س اَبَ} = \frac{س بَ حَ}{س بَ حَ} = \frac{س حَ دَ}{س حَ دَ} = \frac{اَبَ}{بَ حَ} = \frac{بَ حَ}{حَ دَ}$$

$$\frac{س اَبَ}{س اَبَ} = \frac{س بَ حَ}{س بَ حَ} = \frac{س حَ دَ}{س حَ دَ} = \frac{اَبَ}{بَ حَ} = \frac{بَ حَ}{حَ دَ} = \frac{حَ دَ}{دَ هَ} = \frac{دَ هَ}{هَ زَ} = \frac{هَ زَ}{زَ حَ} = \frac{زَ حَ}{حَ دَ}$$



ومن هذه السلسلة ينتج

أولاً - أن أحرف الهرم وارتفاعه منقسمة إلى أجزاء متناسبة بالمستوى القاطع  
 ثانياً - أن الزوايا المتناظرة من القاعدة والقطع متساوية وأن الأضلاع فيهما متناسبة وبذلك  
 يكونان متشابهين وهو المراد

نتيجة ١ - إذا قطع هرمان متحد الارتفاع بمستويين موازيين لقاعدتيهما ومتباعدين عنهما  
 سيعد واحدان النسبة بين القطعين تكون مساوية للنسبة بين القاعدتين  
 لأنه إذا دل  $ع$  على ارتفاع الهرمين المشترك و  $عَ$  على بعد رأس كل هرم عن مستوى القطع  
 و  $حَ$  و  $دَ$  على مساحتي القاعدتين و  $زَ$  و  $حَ$  على مساحتي القطعين حدث على مقتضى  
 النظرية السابقة أن

$$\frac{عَ}{ع} = \frac{حَ}{دَ} \text{ و } \frac{عَ}{ع} = \frac{زَ}{حَ} \text{ أو } \frac{حَ}{دَ} = \frac{زَ}{حَ} \text{ وهو المراد}$$

نتيجة ٢ - إذا كان القاعدتان متكافئتين يكون القطعان كذلك

## دعوى نظرية

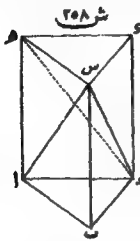
(٢١٠) الهرمان الثلاثيان المتكافئان في القاعدة والمتحدان في الارتفاع متكافئان  
 (شكل ٢٥٧)

نفرض أن قاعدتي الهرمين  $اَبَ حَ$  و  $اَبَ حَ$  في مستوي واحد وأن ارتفاعهما المشترك  
 هو  $ا ح$  فإذا قيل بعدم تكافئي الهرمين المذكورين وإن  $س اَبَ حَ$  هو أكبرهما فنفرض  
 أن الفرق بينهما يكافئ منشوراً ثلاثياً قاعدته  $اَبَ حَ$  وارتفاعه  $ا ح$  ثم نقسم الارتفاع  $ا ح$

(١٠) التحفة البهية (ثالث)



مع المستوى  $س هـ$  فإنه يتشكل من ذلك منشور ثلاثي متضمن الهرم المعلوم في القاعدة وفي الارتفاع ويطلب البرهنة على أنه يتركب من ثلاثة أهرامات ثلاثية كل واحد منها يكافئ الهرم المعلوم  $س هـ ا ب$



لذلك يقال إذا تصورنا حذف الهرم المعلوم من المنشور الثلاثي فإن الباقي يكون هرمًا رباعي رأسه  $س هـ$  وقاعدته متوازي الاضلاع  $ا ب د هـ$  فإذا مررنا المستوى  $س هـ د$  فإن الهرم الرباعي ينقسم إلى هرمين ثلاثيين متساويين في الارتفاع ومتساويين في القاعدة فيكونان متكافئين واذن فلم يبق سوى البرهنة على أن أحدهما الهرمين يكافئ الهرم المعلوم

وللوصول إلى ذلك يقال إن الهرم  $س هـ د$  يمكن اعتباره رأسه  $د$  وقاعدته  $س هـ$  وحيث إن المثلث  $س هـ ا ب$  فيكون الهرم المتكافئ لاتحادهما أيضاً في الارتفاع نتيجة ١ - ينتج مما ذكر أن مساحة الهرم الثلاثي تساوي ثلث مساحة حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه فإذا كانت قاعدته  $ق$  وارتفاعه  $ع$  تكون مساحته مساوية إلى  $\frac{1}{3} \times ق \times ع$

نتيجة ٢ - حيث إن أي هرم يمكن تقسيمه إلى أهرامات ثلاثية بواسطة المستويات التي تمر برأسه وبأقطار قاعدته الخارجة من رأس واحد منها وأن مساحة كل واحد من هذه الأهرامات الثلاثية تساوي ثلث حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه فيكون مجموعها أي مساحة الهرم الكلي مساويًا لثلث حاصل ضرب مجموع قواعدها في ارتفاعها المشترك بينها وحيث إن هذه الأهرامات متضمنة الهرم الأصلي في الارتفاع وإن مجموع قواعدها يدل على قاعدة الهرم المذكور فتكون مساحته تساوي ثلث حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه

نتيجة ٣ - يستفاد مما تقدم أن أي هرم يمكن اعتباره كله ثلث المنشور المتضمنه في القاعدة وفي الارتفاع

تنبيه - المساحة السطحية الجانبية للهرم هي مجموع مساحات أوجهه المركب هو منها ويضم إلى ذلك إذا اقتضى الحال المساحة القاعدة التي يمكن أن تكون شكلًا ما إذا أريد الحصول على المساحة السطحية الكلية غير أن تلك المساحة تختص أحياناً بما إذا كان الهرم المعلوم منتظماً لأن أوجهه تكون في هذه الحالة مثلثات متساوية الساقين ومتساوية وخين تنفيذك في الحال لاخذ مساحة أحدهما وضرب الناتج في عددها ويضم إلى الناتج مساحة القاعدة في حالة ما إذا الحصول على المساحة السطحية الكلية

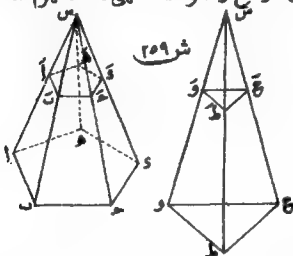
## الفصل السادس

### في كثيرات السطوح المحدبة

(٣١٢) متى علمت مساحة الهرم الثلاثي فإنه يمكن بواسطتها الحصول على مساحة أى كثير سطوح محدب معلوم وذلك لانه مهما كان كثير السطوح المحدب المعلوم فإنه يمكن تقسيمه الى اهرامات ثلاثية بواسطة مستقيمتين تصل بين أحد رؤسها ورؤسها الآخر وتشكلم الآن عن بعض أحوال خصوصية يكون للمساحة فيها قانون بسيط

### دعوى نظرية

(٣١٣) اذا قطع أى هرم بمستو مواز لقاعدته وحذف الهرم الاصغر فان الهرم الناقص الباقي يتركب من ثلاثة اهرامات متحدة مع بعضها في الارتفاع وأما قواعد هاهى قاعدة الهرم الناقص



الباقي والسفلى والوسط المتناسب بينهما

ليكن  $مر ا ب ح د ه$  (شكل ٢٥٩) هراما مقطوعا بالمستوى  $ا ب ح د ه$  الموازى لقاعدته وليكن  $مر و ح ط$  هراما آخر ثلاثيا متصدا مع الاول في الارتفاع ومكافئا له في القاعدة ثم يفرض وجود قاعدتيهما في مستوى واحد فاذا مد المستوى القاطع

$ا ب ح د ه$  فإنه يحدد على الهرم الثانى القطع  $و ح ط$  الذى يكون بعده عن مستوى القاعدة مساويا ضرورة لبعدها القطع  $ا ب ح د ه$  عن مستوى القاعدة  $ا ب ح د ه$  وحينئذ يكون القطعان متساويين وبناء عليه يكون الهرمان  $مر ا ب ح د ه$  و  $مر و ح ط$  متساويين أيضا لتساوى قاعدتيهما واتحادهما في الارتفاع فاذا حذفنا من الهرمين الكلين كان الباقيان وهما الهرمان الناقصان  $ا ب ح د ه$  و  $و ح ط و ح ط$  متساويين وانذ فيكنى البرهنة على منطوق النظرية على الهرم الثانى الناقص فنقول

ليكن  $و ح ط و ح ط$  الهرم الثانى الناقص المعلوم (شكل ٢٦٠) فنستصور بالنقط الثلاثة  $و ح ط$  تمرر مستويا فإنه يحدد أحد الأهرامات الثلاثة الثلاثية  $ط و ح ط$  لانه متحد

مع الهرم الناقص المذكور في الارتفاع وقاعدته القاعدة السفلى له و ط ح فذا حذف هذا الهرم من الهرم الكلي فالباقي بعد ذلك يكون هرمًا رباعيًا رأسه ط وقاعدته و ح و ع ثم اذا تصورنا أيضًا تقسيم الهرم بالنقط الثلاثة و و ح و ط فان هذا الهرم الرباعي يتقسم الى هرمين ثلاثيين أحدهما ط و ح و ع وثانيهما ط و ح و و أما الاول فانه يمكن اعتباره رأسه ح وقاعدته و ح ط وهو متحد مع الهرم الناقص في الارتفاع وقاعدته القاعدة العليا له وان فهو ثلثي

الاهرامات الثلاثية الثلاثة وأما الثاني فهو كافي الهرم الذي رأسه م وقاعدته و ح و لاتحادهما في القاعدة وفي الارتفاع لوجود رأسهما ط و م على مستقيم مواز للقاعدة غير أن هذا الهرم الأخير يمكن اعتباره رأسه و وقاعدته ح و م وهو هرم متحد مع الهرم الناقص في الارتفاع فاذا برهن على أن قاعدته ح و م وسط متناسب بين القاعدتين و ح ط و و ط ح ثبت المطلوب ولذلك يقال يضمن نقطة م المستقيم م ح موازيا ط ح فيكون المثلث و م ح = المثلث و ح ط ثم يؤخذ من المثلثين و ح ط و و ح م المتحدتين في الارتفاع أن

$$\frac{و ح ط}{و م} = \frac{و ح ط}{و م}$$

وكذا يؤخذ من المثلثين و ح م و و ح م المتحدتين في الارتفاع أن

$$\frac{و ح ط}{و م} = \frac{و ح ط}{و م} = \frac{و ح ط}{و م}$$

ومن هذين التناسبين ينتج

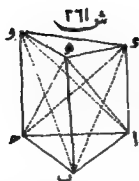
$$\frac{و ح ط}{و م} = \frac{و ح ط}{و م} \text{ أو } \frac{و ح ط}{و م} = \frac{و ح ط}{و م} \text{ وهو المراد}$$

نتيجة - اذا مررتا بالمرتين و و ح لقاعدتي الهرم الناقص و ح لارتفاعه فتصل

$$\text{مساحة الهرم الناقص} = \frac{ع}{٢} (و + و + و)$$

دعوى تطهيره

(٣١٤) كل منشور ثلاثي ناقص يتكون من ثلاث اهرامات ثلاثية متحدة جميعها مع في القاعدة السفلى وأما رؤسها فهي رؤس القاعدة العليا له (شكل ٢٦١)



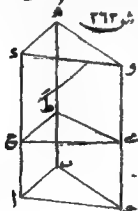
ليكن ا ب د ه و المنشور الثلاثي الناقص المعالج  
أولاً - المستوى ه د ا يفصل بين الجسم الهرم ا ه و  
وهو أحد الأهرامات الثلاثة الثلاثية والباقي بعد حذفه هو الهرم  
الرابع ه و د ا الذي يتقسم بالمستوى د ه الى هرمين  
ثلاثيين

ثانياً - الهرم ه د ا يكافئ الهرم ب د ا لاتحادهما في القاعدة د ا ولوجود  
رأسهما على المستقيم ه ب الموازي للقاعدة فيكونان متطابقين في الارتفاع غير ان هذا الهرم  
الثاني يمكن اعتباره رأسه د وقاعدته ا ب وهو ثاني الأهرامات الثلاثية

ثالثاً - الهرم ه د و يكافئ الهرم ب د و وهذا يمكن اعتباره رأسه د وقاعدته  
و ب لكن هذا الأخير يكافئ الهرم ا و ب لاتحادهما في القاعدة والارتفاع وهو يمكن  
اعتباره رأسه د وقاعدته ا ب وهو الهرم الثالث

نتيجة ١ - اذا كانت الاحرف د و ه ب و د ا عمودية على مستوى القاعدة ب ح  
فان المساحة الكلية للمنشور الناقص تساوي  $\frac{1}{2} \times ا ب \times د + \frac{1}{2} \times ا ب \times ح + \frac{1}{2} \times ا ب \times و$   
 $+ \frac{1}{2} \times ا ب \times د ا$  أو تساوي  $\frac{1}{2} \times ا ب \times (د + و + ح + د ا)$   
أو اذا رمز بالرمز ب لقاعدة المنشور وبالرموز ع و ع و ع للارتفاعات د و ه ب و د ا يحدث

المساحة الكلية للمنشور الناقص  $= \frac{1}{2} \times (ع + ع + ع) \times ب = \frac{ب \times (ع + ع + ع)}{2}$   
نتيجة ٢ - اذا لم تكن الاحرف عمودية على مستوى القاعدة ا ب ح كما في (شكل ٢٦٢)



فانه يقطع المنشور عمودياً على أفرعه فينقسم بذلك الى  
منشورين ناقصين د ه و ح ط و ا ب ح ط على أفرعها  
عمودية على مستوى القاعدة المشتركة ويحدث بناء على ماقرر  
في النتيجة الاولى أن

مساحة د ه ح ط = ع ط =  $\frac{1}{2} \times (د + و + ح ط) \times ع$   
ومساحة ا ب ح ط = ع ط =  $\frac{1}{2} \times (ا + ب + ح ط) \times ع$   
وتكون المساحة الكلية للمنشور الناقص ا ب د ه و =  
ع ط =  $\frac{1}{2} \times (د + و + ح ط + ا + ب + ح ط) \times ع$



أعني ان المساحة الكلية للمنشور الناقص تساوي حاصل ضرب القطع العمودي على أ حرفه في ثلث مجموع أ حرفه الثلاثة

## الفصل السابع

في التماثل

### تعريف

(٢١٥) النقطتان التماثلتان بالنسبة لمستقيم هما اللتان يكون المستقيم الواصل بينهما عمودا على مستقيم التماثل ومنقسماه الى قسمين متساويين (شكل ٢٦٣) ويسمى مستقيم التماثل بمحور التماثل



الشكل > المائل للشكل و المعلوم بالنسبة لمحور تماثل هو محل النقط المائلة لنقط الشكل و بالنسبة لهذا المحور

(٢١٦) النقطتان التماثلتان بالنسبة لنقطه تماثل هما اللتان يكون المستقيم الواصل بينهما مارا بنقطه التماثل ومنقسماه الى قسمين متساويين شكل ٢٦٤ ونقطه التماثل هذه تسمى بمركز التماثل

الشكل > المائل للشكل و المعلوم بالنسبة لمركز تماثل هو محل النقط المائلة لنقط الشكل و بالنسبة لهذا المركز

(٢١٧) النقطتان التماثلتان بالنسبة لمستو هما اللتان يكون المستقيم الواصل بينهما عمودا على مستوى التماثل ومنقسماه بنقطه تقابلها الى قسمين متساويين (شكل ٢٦٦) ويسمى المستوى المذكور بمستوى التماثل

الشكل > المائل لا خرو معلوم بالنسبة لمستوى تماثل هو محل النقط المائلة لنقط الشكل و بالنسبة لهذا المستوى

### دعوى نظرية

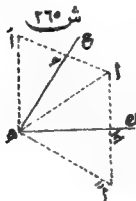
\* (٢١٨) الشكلان التماثلان بالنسبة لمحور تماثل متساويان (شكل ٢٦٣)



- \* ثانيا - الشكل المائل زاوية هو زاوية مساوية لها وتكون هذه النظرية بدئية اذا اختبر رأس الزاوية مع كمال التائل \*
- \* ثالثا - الشكل المائل لكثير أضلاع هو كثير أضلاع مساو له وتنتج هذه النظرية من سابقتها \*
- \* رابعا - الشكل المائل المستوي هو مستوي وتكون هذه النظرية واضحة بنفسها اذا اختبر مركز التائل على المستوى \*
- \* خامسا - الشكل المائل زاوية زوجية هو زاوية زوجية مساوية لها وتكون هذه النظرية بدئية اذا اختبر مركز التائل على حرف الزاوية الزوجية \*
- \* سادسا - الشكل المائل زاوية مجسمة كثيرة الواجهة هي زاوية أخرى مجسمة كثيرة الواجهة تكون جميع أجزائها متساوية غير انهما متخالفة في ترتيب الوضع \*

### دعوى نظرية

- \* (٣٢٠) الشكلان المائلان لثالث بالنسبة لمستوي عمائل مختلفين متساويان (شكل ٢٦٥) \*  
ليكونا  $\alpha$  و  $\beta$  مستويي التائل و  $\alpha$  و  $\beta$  ... الخ  
النقط المختلفة من الشكل و  $\alpha$  و  $\beta$  ... الخ  
النقط المناظرة لهما من الشكل و المائل للشكل و بالنسبة  
لمستويي التائل  $\alpha$  و  $\beta$  ... الخ والنقط المناظرة  
للقط الاول ايضا من الشكل و المائل للشكل و بالنسبة  
لمستويي التائل  $\alpha$  و يطلب البرهنة على ان الشكلين  
و و متساويان \*

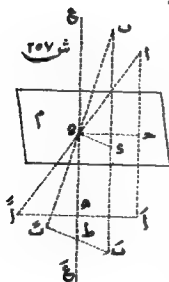


- \* فيقال اذا مر زنا مستويا بالمستقيمين  $\alpha$  و  $\beta$  فانه يكون عمودا على المستويين  $\alpha$  و  $\beta$  واذن فيكون عمودا على خط تقاطعهما وبذلك تكون زاوية  $\alpha$  هـ ك مقاس الزاوية الزوجية الواقعة بين المستويين  $\alpha$  و  $\beta$  ثم اذا وصل  $\alpha$  هـ  $\beta$  و  $\alpha$  هـ  $\beta$  فان المثلث  $\alpha$  هـ  $\beta$  يكون متساوي الساقين وتكون نقطة  $\alpha$  هـ  $\beta$  وسط المستقيم  $\alpha$  و  $\beta$  وتكون زاوية  $\alpha$  هـ  $\beta$  = زاوية  $\alpha$  هـ  $\beta$  وكذا حيث ان المثلث  $\alpha$  هـ  $\beta$  متساوي الساقين ونقطة  $\alpha$  هـ  $\beta$  في وسط الضلع  $\alpha$  هـ  $\beta$  تكون زاوية  $\alpha$  هـ  $\beta$  = زاوية  $\alpha$  هـ  $\beta$  وحينئذ تكون زاوية  $\alpha$  هـ  $\beta$  = زاوية  $\alpha$  هـ  $\beta$  = زاوية  $\alpha$  هـ  $\beta$  وهكذا \*

(١١) التحفة البهية (ثالث)

- \* إذا قرر هذا وفرض ارتباط الشكل وَّ بالمستوى لَمْ يُمْصِرْ تدوير هذا المستوى حول
- \* نقطة هـ المشتركة بمقدار زاوية تساوي ضعف الزاوية الواقعة بين المستويين فإن جميع
- \* نقط الشكل وَّ مثل أ و ب و ... الخ تنطبق على النقطة أ و ب و ... الخ
- \* المناظرة لها من الشكل وَّ واذن فالشكلان وَّ وَّ متساويان وهو المراد
- \* نتيجة ١ - يفتح مما ذكر أن تعيين الشكل المماثل لا يخلو لا يرتبط بمستوى عمائل معين
- \* نتيجة ٢ - يمكن أن يستنتج مما تقدم مقدار عظيم من النتائج المهمة وهي
- \* أولاً - الشكل المماثل المستقيم هو مستقيم مساو له وتظهر بدهة هذه النظرية إذا اشتمل
- \* مستوى العمائل على المستقيم
- \* ثانياً - الشكل المماثل لزاوية هو زاوية متساوية لها وتظهر بدهة هذه النظرية إذا اعتبر
- \* مستوى العمائل نفس مستوى الزاوية
- \* ثالثاً - الشكل المماثل لمضلع هو مضلع مساو له وتظهر بدهة هذه النظرية إذا اعتبر
- \* مستوى العمائل نفس مستوى المضلع
- \* رابعاً - الشكل المماثل لسطح هو سطح مستو وتكون هذه النظرية بديهية إذا اعتبر المستوى
- \* المعلوم مستوى العمائل
- \* خامساً - الشكل المماثل لزاوية زوجية هو زاوية زوجية متساوية لها وتسهل البرهنة
- \* على ذلك إذا اعتبر المستوى النصف لها مستوى العمائل

## دعوى نظرية



- \* (٢٢١) الشكلان المماثلان لثلاث أحدهما
- \* بالنسبة لستو وثانيهما بالنسبة لنقطة متساويان
- \* (شكل ٢٦٦)
- \* ليكن م مستوى العمائل وحيث أن اختيار مركز
- \* العمائل لا يرتبط به تعيين الشكل المماثل فتأخذ
- \* في نقطة د على المستوى م وليكن أ و ب و ... الخ
- \* نقط الشكل وَّ و ١ و ب و ... الخ النقط
- \* المناظرة لها من الشكل وَّ المماثل للشكل وَّ بالنسبة
- \* للمستوى م وَّ أ و ب و ... الخ النقط المناظرة

\* للادوى أيضا من الشكل و المائل للشكل و بالنسبة لمركز التماثل  $\odot$  فنقسم نقطة  $\odot$  المستقيم ع ع عمودا على المستوى م ثم نصل  $\odot$  و آ آ فنحن حيث ان المستقيم ع ع عمودا على المستوى فيكون موازيا آ آ وحينئذ فيكون موجودا بقلمه في المستوى آ آ ولكن ه النقطة التي تقابل فيها مع آ آ ومن حيث ان نقطتي  $\odot$  و  $\odot$  موجودتان في منتصفى المستقيمين آ آ و آ آ فيكون المستقيم آ آ موازيا  $\odot$  وبناء عليه يكون عمودا على ع ع ومن جهة أخرى حيث كانت  $\odot$  منتصف آ آ وكان ع ع موازيا آ آ تكون نقطة ه في منتصف آ آ وبناء عليه فيكون النقطتان آ و آ ممثلتين بالنسبة لمحور التماثل ع ع وينطبق هذا البرهان على نقط أخرى متناظرة من الشكلين و و ويكون الشكلان المذكوران ممثلين بالنسبة لمحور التماثل ع ع واذن فهما متساويان (٢١٨)

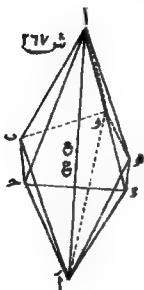
\* نتيجة ١ - ينتج من هذه النظرية ومن المتقدمتين عليها ان أى شكل لا يكون له الا شكل واحد مماثل له ولا ييجاد هذا الأخير ينتخب امام مستوا و نقطة للتماثل تكون موافقة للاعمال المتضمنى اجزاؤها

\* نتيجة ٢ - يمكن استنتاج نظرية (عمر ٣٢٠) من هذه النظرية لانه اذا كان الشكلان و و و ممثلين للشكل و بالنسبة للمستويين ع و ل و اعتبرنا الشكل و المائل للشكل و بالنسبة لمركز التماثل  $\odot$  فيكون ممثالا لكل واحد من الشكلين و و و واذن فيكونان متساويين

## دعوى نظرية

\* (٢٢٢) كثيرا السطوح المتماثلان يكون فيهما  
\* أولا - الواجه المتناظرة متساوية - وثانيا - زواياهما الزوجية المتناظرة متساوية  
\* وثالثا - أحرفهما المتناظرة متساوية - ورابعا - تكون زواياهما المجمعة مركبة  
\* من أجزاعتساوية وموضوعة في جهات متضادة  
\* وهذه النظرية تنتج مما سبق ذكره من ان الشكل لا يكون له الا شكل واحد مماثل له فقط  
\* ومن النتائج التي ذكرت (تتفرق ٣١٩ و ٣٢٠ نتيجة ٢)  
\* نتيجة - كثيرا السطوح المتماثلان يتركان من عدد واحد من الارتفاعات الثلاثية المتماثلة  
\* لانه اذا تشكل من أربع قطع من الشكل وهرم ثلاثى فان النقط المماثلة لها من الشكل و يتركب منها هرم ثلاثى أيضا

## دعوى نظرية



- \* (٢٢٣) كثيرا السطوح المتماثلان متكافئان (شكل ٢٦٧)  
 \* أولا - نفرض هرا معلوما  $ا ب ح د ه و$  ونرسم الهرم  
 \* المتماثل له يجعل قاعدته  $ب ح د ه و$  ومستوى التماثل فيشكل  
 \* من ذلك الهرم  $ا ب ح د ه و$  المتحد مع الاول في القاعدة  
 \* وفي الارتفاع لان  $ا ح = ا ع$  فيكونان متكافئين  
 \* ثانيا - حيث ان كثيرى السطوح المتماثلين يتركان من  
 \* عدد واحد من الاهرامات الثلاثية المتماثلة فهما اذن  
 \* متكافئان

## الفصل الثامن

في التشابه

### تعريف

- \* (٢٢٤) كثيرا السطوح المتشابهان هما اللذان تكون أوجههما المتناظرة متشابهة  
 \* وزواياهما المجسمة المتناظرة متساوية ونعني هنا الزوايا المجسمة المتناظرة الزوايا المجسمة  
 \* المتشكلة من الواجه المتناظرة المتشابهة وتسمى رؤس زوايا هذه المجسمات بالرؤس المتناظرة  
 \* والمستقيمات الواصلة بين رؤس متناظرة تسمى بالمستقيمات المتناظرة والواجه المتناظرة هي  
 \* الواجه التي تكون متشابهة والزوايا الزوجية المتناظرة من كثيرى السطوح المتشابهين  
 \* متساوية

- \* (٢٢٥) حيث ان الزوايا المجسمة المتناظرة متساوية على مقتضى تعريف تشابه كثيرى  
 \* السطوح فتكون الاجزاء المتساوية تقع ماموضوعة على ترتيب واحد اذن فتكون الواجه  
 \* المتناظرة من كثيرى السطوح المتشابهين موضوعة على نظم وترتيب واحد

## دعوى نظرية

- \* (٢٢٦) اذا قطع هرم بمستو مواز لقاعدته فانه يحدد عليه هرنا جديدا متشابها للاول  
 \* (شكل ٢٦٨)

\* فإذا قطع الهرم من  $أ ب ح د ه و$  بمستوى مواز قاعدته فإنه يبرهن على أن الهرم من  $أ ب ح د ه و$  مشابه للاول

\* ولذلك يقال - أولاته بناء على ما تقدم (بمزة ٢٠٩)

\* تكون أوجه الهرمين متشابهة النظر لنظيره

\* ثانيا - ان فيهما الزاوية المجسمة من مشتركة

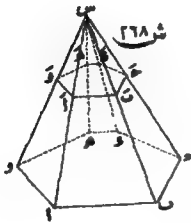
\* ولتكون الزوايا المستوية المناظرة من المجسمين

\*  $أ$  ،  $أ$  متساوية وموضوعة على ترتيب واحد تكونان

\* متساويتين وكذا يساوي فيهما باقي الزوايا المجسمة

\* المناظرة أي أن  $ب = ب$  و  $ج = ج$  و  $د = د$

\* وهكذا وبناء عليه فيكون الهرمان متشابهين (٢٢٤)



## د عوى نظرية

\* (٢٢٧) يشابه الهرمان الثلاثيان اذا تساوى منهما زاويتان زوجيتان متناظرتان وكاتا

\* محصورتين بين أوجه متشابهة فيهما موضوعة على ترتيب واحد (شكل ٢٦٩)

\* اذا كانت الزاوية الزوجية  $أ ب$  تساوى

\* الزاوية الزوجية  $أ ب$  وكان الوجه  $أ ب$

\* مشابها للوجه  $أ ب$  والوجه  $أ ب$

\* مشابها للوجه  $أ ب$  يكون الهرمان

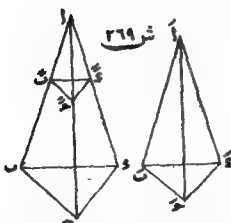
\* متشابهين

\* وللهذه على ذلك يؤخذ البعد  $أ ب =$  البعد

\*  $أ ب$  ويمر من نقطة  $ب$  مستويا موازاً لقاعدة

\*  $ب ح د$  فالهرم الثلاثي  $أ ب ح د$  يكون

\* على مقتضى النظرية السابقة مشابها للهرم



\*  $أ ب ح د$  وبناء عليه فقد آل الامر الى البرهنة على أن الهرم  $أ ب ح د$  مساوياً للهرم

\*  $أ ب ح د$  وللوصول الى ذلك يقال ان المثلثين  $أ ب ح$  و  $أ ب ح$  فيهما  $أ ب = أ ب$

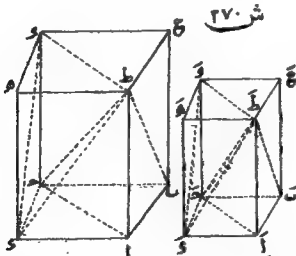
\* عملا والزاوية  $ب أ ح = ب أ ح$  فرضا والزاوية  $أ ب ح = أ ب ح$

\* فرضا أيضا واذن فهما متساويان وبمثل ذلك يبرهن على تساوى المثلثين  $أ ب ح$  و  $أ ب ح$

- \* وحيث كانت الزاوية الزوجية  $أ ب$  تساوى الزوجية  $أ ب$  فرضاً فيكون الهرمان
- \* الثلاثين  $أ ب ح د$  و  $أ ب ح د$  متساويين
- \* نتيجة - يمكن ارتكازاً على هذه النظرية وعلى ما قيل في تعريف كثيرات السطوح المتشابهة
- \* أن يبرهن على النظريات الآتية وهي
- \* الأولى - يشابه الهرمان الثلاثين إذا تناسبت أحرفهما المتناظرة وتشابهت وضعاً
- \* الثانية - يشابه الهرمان الثلاثين إذا شابه وجهه من أحدهما نظيره من الآخر وكانت
- \* الزوايا الزوجية الثلاثة المجاورة له مساوية لنظائرهما من الثاني ومتشابهة وضعاً
- \* الثالثة - يشابه الهرمان الثلاثين إذا تساوت فيهما جميع الزوايا الزوجية المتناظرة
- \* وتشابهت وضعاً

### دعوى نظرية

- \* (٢٢٨) كثيرا السطوح المركبان من عدد واحد من الأهرامات الثلاثية المتشابهة صورة
- \* ووضعاً متشابهان أعني أن أوجههما المتناظرة متشابهة وزواياهما المجسمة المتناظرة
- \* متساوية (شكل ٢٧٠)
- \* ليكن  $ط أ ب ح د$  و  $ط أ ب ح د$
- \*  $ط ح د$  و  $ط ح د$  و  $ط ح د$  و... الخ
- \* الأهرامات المتركب منها كثير
- \* السطوح الأولى و  $ط أ ب ح د$
- \* و  $ط ح د$  و  $ط ح د$  و... الخ
- \* الأهرامات المتركب منها كثير
- \* السطوح الثاني



- \* أولاً - الثلاثين  $ح د أ$  و  $أ ب ح د$  المتركب منهما الوجه  $أ ب ح د$  من كثير السطوح
- \* الأول يشابهان مع تناظر الثلاثين  $ح د أ$  و  $أ ب ح د$  الموجهين على سطح كثير السطوح
- \* الثاني بسبب تشابه الأهرامات الثلاثية وزيادة على ذلك حيث أن الثلاثين  $ح د أ$  و  $أ ب ح د$
- \* موجودان في مستو واحد فيجب أن يكون الثلاثين  $ح د أ$  و  $أ ب ح د$  كذلك
- \* وللهذه على ذلك يقال حيث أن الهرمين الثلاثين  $ط ح د أ$  و  $ط أ ب ح د$  يشابهان
- \* الهرمين  $ط ح د أ$  و  $ط أ ب ح د$  فرضاً فتكون الزاويتان الزوجيتان  $ط ح د أ$



\* ط ح ا ب مساويين بالنظر للزوجيتين ط ح ا د , ط ح ا ب وحيث كان مجموع  
الاولتين مساويا فاثنتين فيكون مجموع الاخرين كذلك وبناء عليه فيكون كثيرا الاضلاع  
ا ب ح , ا ب د متشابهين لتركبهما من عدد واحد من المثلثات المتشابهة صورة ووضعها  
وبمثل ذلك يبرهن على تشابه باقي اوجه كثيرى السطوح ما أخذت معنى  
ثانيا - يشاهد أن الزوجية ط ا التي هي مجموع الزوجيتين ح ط ا د , ح ط ا ب  
تساوى للزاوية الزوجية ط ا مجموع الزوجيتين ح ط ا د , ح ط ا ب وعلى العموم  
كل زوجيتين متناظرتين من كثيرى السطوح متساويتان لانها عبارة عن مجموع زوايا  
زوجية متناظرة متساوية ومن ذلك ينتج أن الزوايا المجسمة المتناظرة متساوية مثل ا , ا  
لتساوى الزوايا المستوية فهما المتناظرة وتشابهها وضعها مع تساوى ميولها على بعضها

### دعوى نظرية

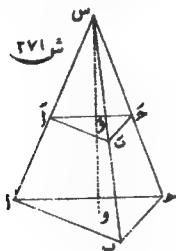
\* (٣٢٩) وبالعكس - كثيرا السطوح المتشابهان يتركبان من عدد واحد من الاهرامات  
الثلائية المتشابهة صورة ووضعها (شكل ٢٧٠)  
\* اذا اعتبرنا ط رأسا لكثير السطوح ا ب ح د ه و ط وقسمنا اوجهه الغير المجاورة  
للرأس ط الى مثلثات واعتبرنا كل واحد منها قاعدة لهم ثلثاى رأسه ط فان كثيرا السطوح  
المذكورة تنقسم الى اهرامات ثلائية يتكون من مجموعها الجسم المذكور  
\* ولو أخرجنا مثل ذلك في كثير السطوح الثاني فاننا نشاهد انقسامها الى عدد واحد من  
الاهرامات الثلائية ولم يبق علينا سوى البرهنة على أن كل اثنين منها متناظرين في الجسمين  
متشابهان  
\* ولذلك يقال اذا قارنا الهرم الثلاثى ط د ح ا بالهرم الثلاثى ط د ح ا نشاهد فيها أن  
الثلثين ط د ا , ح د ا يشابهان بالنظر للثلثين ط د ا , ح د ا بسبب تشابه  
الوجهين ه د ا ط , ه د ا ط من جهة والوجهين ح د ا ب , ح د ا ب من  
جهة أخرى وأن الزاوية الزوجية د ا = الزاوية الزوجية د ا فراضا حينئذ فيكون  
الهرمان المذكوران متشابهين (٣٢٧)  
\* ثم اذا انتقلنا الى الهرمين الثلاثين ط د ح و , ط د ح و نشاهد فيهما تشابه الثلثين  
ط د ح , ط د ح لانهما وجهان متناظران من هرمين ثلاثين متشابهين وكذا نشاهد  
تشابه الوجه د ح و للوجه د ح و بسبب تشابه كثيرى الاضلاع ه د ح , و ه د ح

\* وغير ذلك فان الزوجيتين و د ا ، و د ح ا متساويتان فرضا والزوجيتان ط د ا ، و ط د ح ا متساويتان بسبب تشابه الهرمين ط د ا ، و ط د ح ا واذن يكون الهرمان الثلاثيان ط د و ، و ط د ح و متشابهين وهكذا

\* تنبيه ١ - وما يجب ملاحظته هنا هو أن التقليل المتقدم يمكن اجراؤه باعتبار أى رأسين متناظرين من كثيرى السطوح غير الرأسين ط ، و ط كأنهما رأسان للجسمين  
\* تنبيه ٢ - ينتج من هذه النظرية أن النسبة بين أى مستقيمين متناظرين ا ، و ا مثلا واصليين بين رأسين متناظرين من كل من كثيرى السطوح المتشابهين هي كالنسبة بين أى حرفين ب ، و ب متناظرين فعموما وذلك لأن المستقيمين المذكورين لابد أن يكونا حرفين متناظرين من هرمين ثلاثيين متشابهين عند تحليل كثيرى السطوح الى اهرامات ثلاثية متشابهة وحيث ان هذين الهرمين لابد أن يشتملا على حرفين متناظرين ح ، و ح مثلا من كثيرى السطوح فيحدث  $\frac{ح}{ب} = \frac{ا}{ب}$  وحيث ان أحرف كثيرى السطوح متناسبة فرضا لانهما متشابهان يكون  $\frac{ح}{ب} = \frac{ا}{ب}$  أو  $\frac{ب}{ب} = \frac{ا}{ب}$  وهو المراد

## دعوى نظرية

\* (٢٣٠) النسبة بين الهرمين الثلاثيين المتشابهين كالنسبة بين مكعبى حرفين متناظرين منهما (شكل ٢٧١)



\* حيث ان الهرمين المذكورين متشابهان فانه يمكن  
\* وضع أصغرهما على الأكبر بحيث تكون الزاوية  
\* المشتركة بينهما واذن فتكون القاعدة  
\* ا ب ح موازية للقاعدة ا ب ح لانقسام الاحرف  
\* س ا ، و س ب ، و س ج الى أجزاء متناسبة في  
\* القطع ا ، و ب ، و ح ثم يقال اذا رمزنا بالرمزين  
\* ح ، و ح لمجئى الهرمين و ق ، و ق لقاعدتهما  
\* حدث

$$ح = \frac{ا}{ب} \times س و \quad و = \frac{ا}{ب} \times س و \quad \text{أو}$$

$$\frac{ق}{و} \times \frac{و}{ق} = \frac{س و \times ق}{س و \times ق} = \frac{ح}{ح}$$



- ٤ - إذا دل عدد ١٦,٦٠٤ مترًا مكعبًا على مساحة متوازي مستطيلات والمطلوب معرفة أبعاد الثلاثة إذا علم أنها مناسبة للمقادير  $\frac{1}{8}$  و  $\frac{5}{4}$  و  $\frac{5}{1}$
- ٥ - إذا كان مقدار قطر أحد أوجه المكعب مساويًا ٤ متر والمطلوب حساب مساحته الجسمية
- ٦ - إذا ملئ أناء على شكل مكعب من الكؤل وكانت زنتها معاتادل ٥٢,٦٨٨ كيلوغرامًا وزنة الاناء وحده تعادل كيلوغرامين والمطلوب معرفة عمق هذا الاناء إذا كانت كثافة الكؤل هي ٠,٧٩٢
- ٧ - ما مساحة حجم المنشور الثلاثي الذي ارتفاعه ٥ متر وقاعدته مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه ٥ متر
- ٨ - إذا كانت قاعدة منشور ثلاثي مثلثًا متساوي الاضلاع ضلعه ٥ وكان ارتفاعه ضعف ارتفاع المثلث المذكور اعتبر قاعدة والمطلوب إيجاد قانون مساحته الجسمية
- ٩ - المطلوب تعيين مساحة حجم المنشور الذي ارتفاعه ٣ متر وقاعدته مربع مرسوم داخل دائرة نصف قطرها متران
- ١٠ - إذا كان ارتفاع هرم يساوي ١٥ مترًا ومساحة قاعدته تساوي ١٦٩ مترًا مربعًا فاعلى أى بعد من رأسه يجب قطع هذا الهرم بمستو مواز لقاعدته بحيث تكون مساحة القطع تساوي ١٠٠ مترًا مربعًا
- ١١ - إذا ما صوت مساحة قاعدة هرم ١٤٤ مترًا مربعًا وقطع بمستو مواز لقاعدته على بعد أربعة أمتار من رأسه وكانت مساحة الحادئ تساوي ٦٤ مترًا مربعًا فاعلم مقدار طول ارتفاع الهرم
- ١٢ - إذا دل عدد ١٢ متر على ارتفاع هرم قاعدته مربع ضلعه ٨ أمتار فاعلم مقدار مساحة القطع الحادئ لمن مستو مواز لقاعدته على بعد أربعة أمتار من رأسه
- ١٣ - إذا دل عدد ١٤ متر على الارتفاع المشترك لهرمين قاعدة الاول مربع طول ضلعه ٩ متر وقاعدة الثاني مسدس طول ضلعه ٧ متر فاعلم مقدار مساحتي القطعين الحادئين لهذين الهرمين إذا قطع كل منهما بمستو مواز لقاعدته على بعد ستة أمتار من رأسه
- ١٤ - إذا دل عدد ٨ متر على طول أحد أحرف هرم وأخذ عليه بالابتداء من الرأس بعد يساوي خمسة أمتار ومن نهاية هذا البعد مستو مواز لقاعدة الهرم والمطلوب معرفة النسبة الكائنة بين السطعين الحادئين للهرمين الأصغر والكامل

- ١٥ - المطلوب تقويم هرم ثلاثي منتظم من الفضة طول حرفه يساوى ٠.٦ متر ( كثافة الفضة هي ١٠,٤٧ وقيمة الكيلوغرام الواحد منها يعادل ٢٢٠,٥٥ فرنكا )
- ١٦ - المطلوب إيجاد المساحة الخجمية لهرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ٦ متر وطول أحد أحرفه ٥ متر
- ١٧ - إذا كانت قاعدة هرم شكلا مسدسا منتظما طول أحد أضلاعه ٣ متر والمطلوب أولا معرفة الارتفاع اللازم اعطاؤه لهذا الهرم حتى تكون مساحته السطحية عشرة أمثال مساحة القاعدة وثانيا معرفة المساحة الخجمية
- ١٨ - إذا كان قاعدتا هرم ناقص شكلين مسدسين منتظمين ضلع احدهما متر واحد وضلع الثاني متران والمطلوب حساب ارتفاع الهرم إذا كانت مساحته الخجمية تساوى ١٢ مترا مكعبا
- ١٩ \* - ما مقدار طول حرف المكعب الذى تكون مساحته الخجمية ضعف مساحة مكعب معلوم طول حرفه ٥ متر
- ٢٠ \* - إذا فرض هرم ناقص قاعدتاها شكلان مثنان منتظمان وطول أحد أضلاع القاعدة العليا ٤ متر وطول أحد أضلاع القاعدة السفلى ٣ متر وارتفاع الهرم الناقص ٥ متر والمطلوب معرفة حجم الهرم المكامل
- ٢١ \* - المطلوب معرفة حجم الهرم الناقص الذى ارتفاعه ٩ متر وقاعدتاها شكلان مثنان منتظمان ضلع احدهما ٨ متر وضلع الثانية ٥ متر

(تم الجزء الثالث من كتاب التحفة البهية<sup>٥</sup> وطلبه الجزء الرابع ان شاء الله تعالى)

## فهرسة الجزء الثالث من الثقافة البنية

صفحة	صفحة
٤٩ الفصل الثالث في مساح المثلثات	٣ الجزء الثالث من الثقافة البنية في المستوى
والمضلعات الكروية	والزوايا المجسمة والاكسرة وكثيرات
٥٣ الفصل الرابع في الاقواس المتعامدة	السطوح
٥٥ الفصل الخامس في الدوائر الصغيرة	٣ الباب الاول في المستوى والزوايا المجسمة
٥٧ الفصل السادس في بعض مسائل عملية	٣ الفصل الاول في المستوى وتعيينه
تطبيقية	٤ الفصل الثاني في المستقيمت والمستويات
٥٩ الفصل السابع تمرينات	المتوازية
٦٠ الباب الثالث في كثيرى السطوح	٩ الفصل الثالث في المستقيمت والمستويات
٦٠ الفصل الاول تعاريف	المتعامدة
٦١ الفصل الثاني في المبادئ	١٤ الفصل الرابع في مسقط النقط والمستقيم
٦٥ الفصل الثالث في قياس حجم متوازي	١٦ الفصل الخامس في الزوايا الزوجية
السطوح	١٩ الفصل السادس في المستويات المتعامدة
٧٠ الفصل الرابع في قياس المنشور	٢٣ الفصل السابع في الزوايا المجسمة
٧٢ الفصل الخامس في قياس الهرم	٢٢ الفصل الثامن تمرينات
٧٦ الفصل السادس في كثيرات السطوح	٢٣ الباب الثاني في الكرة
المحدبة	٢٤ الفصل الاول في القطع المستوى للكرة
٧٩ الفصل السابع في القمائل	٢٨ الفصل الثاني في المثلث وكثيرى
٨٤ الفصل الثامن في التشابه	الاضلاع الكروية
٨٩ الفصل التاسع تمرينات	







## المجلد الرابع

من كتب الحفة البهية في الاصول الهندسية

وهو مقر الدروس الهندسية لتلامذة السنة الرابعة بمدرسة التجهيزية

تأليف

حضرة احمد بك قليم

ناظر مدرسة دار العلوم وقلم الترجمة

(تنبيه)

وان كان في خطبة الكتاب في الجزء الاول ان الزيادات تميز عن الاصل بكتابتها بحروف دقيقة  
غير ان مقتضيات الاحوال اوجبت تمييزها بوضع نجوم قبلها في أوائل السطور فليست به

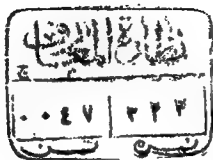
(الطبعة الاولى)

بالطبعة الكبرى الاميرية ببولاق مصر المحيطة

سنة ١٣٠٦

هجريه





بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## المجلد الرابع

في الأجسام المستديرة والقطاعات المخروطية والمعنى البرعي

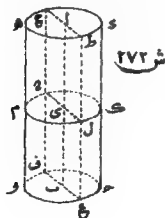
## الباب الأول

في الأجسام المستديرة

## الفصل الأول

في الاسطوانة

(٢٣٢) الاسطوانة القائمة هي جسم يتولد من دوران مستطيل مثل  $AB$  حول ضلع ثابت من أضلاعه  $AB$  مثلا يسمى محور الاسطوانة (شكل ٢٧٢)



ضلع المستطيل  $AS$  و  $B$  هو المحور على المحور والذان لا يزالان كذلك أثناء الدوران وبعد رسمان دائرتين متساويتين مركزاهما  $A$  و  $B$  على المحور ومستوياهما عمودان عليه تسميان بقاعدتي الاسطوانة وأما ارتفاعها فهو المحور

حيث ان كل نقطه تمثل  $\epsilon$  من نقطه ضلع المستطيل  $\epsilon$  الموازي للمعور اب ترسم انما الدوران محبداً  $\alpha$  تمثل كل  $m$   $\alpha$  مركزه  $y$  على المحور ومستويه عود عليه ونصف قطره مساو لنصف قطر القاعدة  $\alpha$  ممكن أن يقال

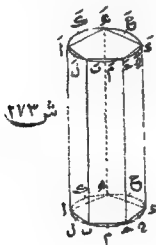
كل مستوٍ وازى قاعدة الاسطوانة فإنه يقطعها في دائرة مساوية للقاعدة  
وأما المستوى القاطعها المار بمحورها فإنه يقطعها في مستطيل مثل ع ط ع ف يكون ضعف  
المستطيل الأصلي

(٣٣٣) السطح المتحنى الذى يتولد من دوران الضلع  $s$  يسمى بالسطح الجانبي للاسطوانة ويمكن تصور تولد هذا السطح على وجه العموم من حركة مستقيمة تنكز دائما على خط ثابت بالتوازي لاجتماعيين ويسمى المستقيم المتحرك براسه أو عموال السطح وانط الثابت بالدليل اذا كان الدليل مستقيما كان السطح المتولد مستويا وحينئذ يكون السطح المستوي حالة خصوصية من السطح الاسطوانى

## نظريّة

(٢٣٤) المساحة السطحية الجانبية للاسطوانة تساوي حاصل ضرب محيط قاعدة ثباتي ارتفاعها

(شكل ٢٧٢)



السطح الجانبي للاسطوانة وإن كان منحنيًا ولا يتيسر مقارنته مباشرة بوحدة السطوح المستوية لكننا نتوصل للمطلوب باعتبار النهاية التي يقرب منها السطح الجانبي لمنشور منتظم أمام رسوم داخل الاسطوانة أو خارجها متى تزايد عدد أوجهه إلى غير نهاية

غير انه لا يكون هذا الاعتبار حقيقيا الا اذا برهننا على وجود تلك النهاية وعلى انها غير مرتبطة لانواع معين

من أنواع المناشر المرسومة داخل الاسطوانة أو خارجها ولا بقانون تضعيف الوجة

وإذ ذلك يقال أذا رسمنا داخل قاعدة الاسطوانة وخارجها شكلين منتظمين متعديين في عدد الأضلاع  $n$  وممددا من رؤس هذين المضلعين مستقيمت موازية للمعور ومنتهية بمستوى القاعدة العليا فأتوصل بذلك إلى منشورين منتظمين أحدهما داخل الاسطوانة والثاني خارجها  $n$  إذا رسمنا بالمرزبين  $ح$  و  $ح'$  المحيطي الشكلين المنتظمين المذكورين وبالمرزبين

س و س للسطين الجائين المنشورين وبالرمز ع لارتفاعهما المشترك تحصل  
(٣٠٨) تنبيه ان  $س = ع$  و  $س = ع$

لكنه حيث قد علم مما سبق انه متى ازداد ع الى غير نهاية فان ع و ع يقربان معان نهاية  
مشتركة لهما محصورة ذات اعين أى مقدارين متقابلين من مقدارى ع و ع وغير مرتبطة  
لابعد ع ولا بقانون تضعيفه وهى طول محيط الدائرة

وكذا حيث ان نهاية حاصل ضرب عدة مضارب مساوية لحاصل ضرب نهايات مضاربه تحصل  
نهاية س = نهاية ع × ع ونهاية س = نهاية ع × ع

واذن فيكون للمقدارين س و س نهاية مشتركة س ليست مرتبطة لابعد الاوجه  
ولا بقانون تضعيفها وهى س = محيط القاعدة × ع

نتيجة - اذا جعل س رمز نصف قطر محيط القاعدة يكون قانون المساحة السطحية  
الجائية للاسطوانة هو  $س = ٢ ط س ع$

### نظمية

(٣٣٥) المساحة الحجمية للاسطوانة تساوى حاصل ضرب قاعدتها في ارتفاعها  
حجم الاسطوانة وان كان محدد السطح منح ولا يمكن مقارنته مباشرة بوحدة الاحجام غير اننا نتوصل  
الى المطلوب باعتبار النهايات فننشئ داخل الاسطوانة وخارجها منشورين منتظمين متعدين  
في عدد الاوجه ورمز حجمها بالرمز م م و م لقاعدتيهما بالرمز ن و ن وحجم  
الاسطوانة وقاعدتيهما بالرمز م م و ن ثم نقول  
من المعلوم ان م أكبر من م لاشغاله عليه وأصغر من م لانحصاره فيه لكنه يحدث (٣٠٨)

$$م = ن × ع \text{ و } م = ن × ع$$

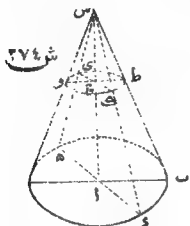
فالذا ازداد عدد الاوجه في هذين المنشورين الى غير نهاية فان ن و ن يقربان من نهاية  
مشتركة ن وهى قاعدة الاسطوانة وحينئذ يكون المقدارين م و م نهاية مشتركة ن ع  
ويكون حجم الاسطوانة م المحصورين م م و م هوتلك النهاية ويحدث  $م = ن ع$

نتيجة - اذا أبذل ن بمقدار متصل قانون المساحة الحجمية للاسطوانة وهو  $م = ط س ع$   
تنبيه - يمكن تطبيق جميع ما ذكر من البراهين مع السهولة على أى اسطوانة مائلة قاعدتها  
دائرة

## الفصل الثاني

### في المخروط

(٢٢٦) المخروط القائم هو جسم يتولد من دوران مثلث قائم الزاوية قاطم الزاوية قاطم من  $أ$  حول ضلع ثابت منه  $س ب$  مثلان ضلعي القائمة يسمى محور المخروط (شكل ٢٧٤)



الضلع الثاني  $أ ب$  للزاوية القائمة العمودي على المحور والذي لا يزال كذلك أثناء الدوران وبعده يرسم دائرة مركزها على المحور ومستوية أعود عليه تسمى بقاعدة المخروط

وأما ارتفاعه فهو المحور

حيث إن أي نقطة تمثل  $ط$  من نقطة الضلع  $س ب$  ترسم محيط دائرة مثل  $ط ك و$  من مركزه  $ع$  على المحور ومستوية أعود عليه أمكن أن يقال كل مستو مواز لقاعدة المخروط يقطعه في دائرة

(٢٢٧) السطح المنحني المتولد من دوران وتر المثلث  $س ب$  يسمى بالسطح الجانبي للمخروط وأما نقطة المحور الثابتة  $س$  التي يمر بها الوتر دائما فتسمى رأس المخروط

ويمكن تصور تولد السطح المخروطي على وجه العموم من حركة مستقيم يمر دائما بنقطة ثابتة ويتكئ على خط ثابت أيضا فالمستقيم المحرك يسمى براسم أو بعود سطح المخروط وأما الخط الثابت فهو الدليل

إذا كان الدليل مستقيما كان السطح المتولد مستويا وحينئذ يكون المستوى حالة خصوصية من السطح المخروطي

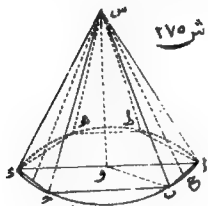
### نظريية

(٢٢٨) المساحة السطحية الجانبية للمخروط تساوي نصف حاصل ضرب محيط قاعدته في حرفه الجانبي (شكل ٢٧٥)

ولو أن السطح الجانبي للمخروط منحني ولا يمكن مقارنته مباشرة بوحدة السطوح المستوية لكأنم ذلك توصل إلى المقصود بواسطة اعتباره النهاية التي يقرب عنها السطح الجانبي لهرم منتظم أما من رسوم داخل المخروط أو خارج متى تراد بعدد أوجهه إلى غير نهاية

لكنه لاجل أن يكون هذا الاعتبار حقيقياً يجب أن يبرهن كما سبق في الاسطوانة على وجود تلك النهاية وانها ليست هي نقطة لانوع من أنواع الاهرام المرسومة داخل المخروط أو خارجه ولا بقانون تضعيف الاوجه

ش ٢٧٥



ولذلك يقال اذا رسمنا داخل قاعدة المخروط سكالاً منتظماً  
عدد أضلاعه  $n$  ومحيطه  $c$  وخارجها شكلاً آخر  
منتظماً متعدد الأضلاع  $m$  ومحيطه  $c'$   
ثم وصل بين رأس المخروط وبين جميع رؤس هذين المضلعين

بمستقيمات فإنه يشكل من ذلك هرمان مستطمان أحدهما داخل المخروط والثاني خارجها وأوجه كل واحد منهما هي مثلثات متساوية ومتساوية الساقين والارتفاع المقدار في مثلثات الهرم الأول الداخل هو  $س ح$  والارتفاع المقدار في مثلثات الهرم الخارج هو  $س ا$  فإذا رمز بالرمزين  $س و س$  للسطحين الجانبيين للهرمين المذكورين تحصل على مقتضى ماقرر بنبرة (٣١١) بقية (١) أن

$$1s \times 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}s, 2s \times 2\frac{1}{2} = 5s$$

فإذا أخذ العدد  $\odot$  في الزيادة إلى غير نهاية فنحن حيث أن  $\odot$  يقرب بنا على هذا القرض من نهايته وهي محيط الدائرة التي نصف قطرها  $\text{وا}$  وأن  $\odot$  يقرب أيضا من نهايته  $\text{س ا}$  (لان  $\text{س ا} - \odot > \text{ا ح}$  فكلما أخذ  $\odot$  في الزيادة قرب  $\text{ا ح}$  من الصفر) فبقرب السطح  $\text{س}$  بنا على من نهاية  $\text{س}$

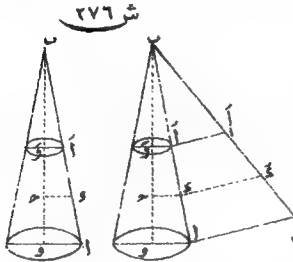
وكذا من حيث انه بناء على الفرض المتقدم يقرب  $\epsilon$  من عين النهاية التي يقرب منها  $\epsilon$  فتكون نهاية المقدارين السابقين واحدة وهي  $s$  وهي كما لا يخفى غير متطرفة لابتعد الاوجه  $\epsilon$  ولا القانون المتبع في زيادته الى غير نهاية فيكون مقدارها هو  $\frac{1}{\epsilon}$  محيط  $\alpha \times s$

نتيجة - إذا رمز بالرمز  $\sigma$  لنصف قطر القاعدة وبالرمز  $\lambda$  للعرف الجانبي لسطح المخروط يكون قانون المساحة السطحية الجانبية للمخروط هو  $\sigma = \lambda \pi$

نتيجة - إذا امتن وسط الحرف الجاني مسو مواز قاعدة فلان نصف قطر دائرة القطع يكون مساويا ضرورة الى نصف قطر القاعدة وذلك يكون محيط القطع مساويا لنصف محيط القاعدة وبناء عليه فيمكن أخذ المساحة السطحية الجانبية للضروط بواسطة ضرب حرف الجاني في محيط الدائرة المتوسطة

## نظريية

(٢٣٩) المساحة السطحية الجائية للمخروط الناقص تساوي نصف مجموع محيطي قاعدتيه في حرفه الجانبي (شكل ٢٧٦)



إذا قطع المخروط بمستوى مواز لقاعدته فان جزء المخروط المصوّر من المستوى القاطع والقاعدة يسمى مخروطا ناقصا. ليكن  $و$  رأس المخروط الناقص و  $ب$  رأس المخروط الاصلى فاذا أقيم من نقطة  $أ$  المستقيم  $أأ$  عمودا على  $أب$  في مستوئنا  $أأ$  أخذ البعد  $أأ$  مساويا لـ  $أب$  محيط  $أأ$  ووصل  $بأ$

وأقيم أيضا من نقطة  $أ$  نهاية حرف المخروط الناقص العمود  $أأ$  على  $أب$  ومدحتي  $أأ$  ب  $أ$  فانه يحصل من المثلثات الخادئة المتشابهة أن

$$\frac{أأ}{أأ} = \frac{بأ}{أأ} = \frac{وأ}{أأ} = \frac{محيط و}{محيط أ}$$

وحيث أن  $أأ$  مساوي لمحيط الدائرة  $أأ$  يكون  $أأ$  مساويا لمحيط  $و$

إذا تقر هذا قال حيث أن مساحة المثلث  $بأأ = \frac{1}{2} \times أب \times أأ$  فهو أن بكافئ السطح الجانبي للمخروط الذي حرفه  $أب$  وكذلك حيث أن مساحة المثلث  $بأأ = \frac{1}{2} \times أب \times أأ$  فهو أن بكافئ السطح الجانبي للمخروط الذي حرفه  $بأ$  وبناء عليه تكون مساحة شبه المخرف  $أأأ$  مساوية لمساحة السطح الجانبي للمخروط الناقص وحيث أن مساحة شبه المخرف تساوي نصف مجموع قاعدتيه المتوازيين في الارتفاع  $أأ$  فتكون المساحة السطحية الجائية للمخروط مساوية لنصف مجموع محيطي قاعدتيه في حرفه الجانبي وهو المراد

تنبيه - إذا من نقطة  $د$  وسط الحرف  $أأ$  مستويا مواز لسطوي القاعدتين فانه يحصل على سطح المخروط الناقص محيط دائرة يسمى بالمحيط المتوسط ثم إذا برهن كما سبق على أن طول هذا المحيط مساو للمستقيم المتوسط  $دأ$  لشبه المخرف  $أأأ$  ولوحظ أن  $دأ$  مساو لنصف مجموع قاعدتي شبه المخرف فيكون المحيط المذكور مساويا لنصف مجموع محيطي القاعدتين



التوازيين للمخروط الناقص واذن تكون المساحة السطحية الجانبية للمخروط الناقص مساوية  
لحاصل ضرب طول المحيط المتوسط في حرف المخروط الناقص الجانبي

نتيجة ١ - اذ امرض بالحرف  $س$  للسطح الجانبي للمخروط الناقص و  $س٠$  و  $س١$  لنصفى  
قطرى القاعدتين و  $ح$  لحرفه الجانبي حدث  $س = ط (س٠ + س١) ح$

\* نتيجة ٢ - ويمكن الحصول على هذا القانون الاخير بواسطة الاعمال الحسابية فاذا دل  $ا$

\* على الحرف الجانبي للمخروط الكلى و  $ا١$  على حرف المخروط المحذوف و  $ح$  على  $ا - ا١$

\* حدث

$$س = ط س٠ ا - ط س١ ا١ = ط (س٠ ا - س١ ا١)$$

\* وحيث ان

$$\frac{س٠}{س١} = \frac{ا١}{ا} \text{ يحدث } \frac{س٠}{س١} = \frac{ا١}{ا} = \frac{س٠ ا - س١ ا١}{س٠ ا - س١ ا١} = 1$$

\* ويكون  $س = ط (س٠ + س١) ح$  وهو عين السابق

### تظريه

(٣٤٠) المساحة المجمية للمخروط تساوى ثلث حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه (شكل ٢٧٥)

حيث ان المخروط محدد بسطح منحن ويتعذر مقارنته مباشرة بوحدة الاحجام فاننا توصل الى  
الغرض باستعمال النهايات فنقول

اذا أنشأنا داخل المخروط وخارجه هرمين  $م$  و  $م٠$  منتظمين متعدين في عدد الاوجه وفرض  
أن  $ق$  و  $ق٠$  رمزان لقاعدتيهما و  $ع$  رمز لارتفاعهما المشترك فنالمعولم أن المخروط  $م$   
يكون أكبر من  $م٠$  لاحتوائه عليه وأصغر من  $م٠$  لانحصار فيه غير أن

$$م = \frac{1}{3} ق \times ع \text{ و } م٠ = \frac{1}{3} ق٠ \times ع$$

فاذا ضعف في عدد أوجه الهرمين الى غير نهاية ولو حظ ما تقدم ذكره (بغزة ٣٣٨) من أن  
 $ق$  و  $ق٠$  يقربان من القاعدة  $ق$  فيكون المجمى الهرمين نهاية مشتركة هي  $\frac{1}{3} ق \times ع$  وبناء  
عليه تكون مساحة المخروط المحصورة دائماً بين المجمين  $م$  و  $م٠$  هي تلك النهاية المشتركة

ويكون  $م = \frac{1}{3} ق \times ع$  وهو المراد

نتيجة - اذا أبدلنا  $ق$  بمقداره  $ط$  حدث  $م = \frac{1}{3} ط ق٠ \times ع$

نتيجه - ما سبق ذكره من البراهين يمكن تطبيقه على أى مخروط ماثل قاعدته دائرة

(٢) القمصة البهية (رابع)

## نظـامـية

(٣٤١) المساحة الخمية للمخروط الناقص تكافئ ثلاثة مخاريط متحدة معه في الارتفاع

وقواعدهما هي قاعدة المخروط الناقص والوسط المتناسب بينهما

يجب للوصول الى هذه النظرية البرهنة على أن المخروط الناقص يمكن تحويله الى هرم ناقص

يكافئه يكون مقصدا معه في الارتفاع وقاعدته تكونان مكافئتين لقاعدتي المخروط الناقص

ولذلك يقال اذا رسم مثلث في مستوى القاعدة السفلى للمخروط الناقص يكون مكافئها ثم وصل

بين رؤسها الثلاثة وبين رأس المخروط الكامل بمستقيمت فانه يتشكل من ذلك هرم ثلاثي متحد

مع المخروط الكلي في الارتفاع ومكافئ له في القاعدة فيكون مكافئه ثم اذا مد مستوى القاعدة

العلية للمخروط الناقص فانه يقطع الهرم في مثلث يشابه مثلث القاعدة فاذا رمزنا بالرمز  $\Gamma$

ط و ط لهذين المثلثين وبالرمز  $\Gamma$  و  $\Gamma$  لقاعدتي المخروط الناقص وبالرمز  $\Gamma$  و  $\Gamma$

لبعديهما عن الرأس فنحصل

$$\frac{\Gamma}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Gamma}$$

وحيث ان ط و  $\Gamma$  متكافئتان فرضا فيكون ط و  $\Gamma$  كذلك واذا فيكون الهرم الاصغر

والمخروط الاصغر متكافئين وبناء عليه يكون الهرم الناقص والمخروط الناقص متكافئين أيضا

وحيث ان مساحة الهرم الناقص تساوي  $\frac{1}{3} (\Gamma + \Gamma + \Gamma \Gamma)$  (نتيجة ٣١٢)

(فرض أن  $\Gamma$  يدل على ارتفاع الهرم الناقص) فتكون مساحة المخروط الناقص مساوية

الى  $\frac{1}{3} (\Gamma + \Gamma + \Gamma \Gamma)$  وهو المراد

نتيجة ١ - اذا استعوض  $\Gamma$  و  $\Gamma$  بمقدارينهما يحدث

$$\Gamma = \frac{1}{3} (\Gamma + \Gamma + \Gamma \Gamma)$$

\* نتيجة ٢ - ويمكن الوصول الى هذا القانون بطريقة حسابية فيقال حيث ان

$$\frac{\Gamma}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Gamma} = \frac{\Gamma}{\Gamma}$$

\* فاذا جعلنا  $\Gamma$  و  $\Gamma$  رمزين لجمعي المخروطين الكامل والاصغر و  $\Gamma$  رمز الفرق بينهما

\* يحدث  $\Gamma = \Gamma - \Gamma = \frac{1}{3} (\Gamma + \Gamma + \Gamma \Gamma) - \frac{1}{3} (\Gamma + \Gamma + \Gamma \Gamma)$

$$\Gamma = \frac{1}{3} (\Gamma - \Gamma) = \frac{1}{3} (\Gamma + \Gamma + \Gamma \Gamma)$$

\* وهو عين القانون السابق

## الفصل الثالث

في بعض سطوح وأحجام دورات

## فائدة

(٢٤٢) السطح المتوازيين قاعدته مثلث متساوي الساقين حول محوره واربرأسه يساوى حاصل ضرب محيط الدائرة التي نصف قطرها ارتفاع المثلث في مسقط القاعدة على المحور (شكل ٢٧٧)

لكن أب قاعدة الثلث المتساوي الساقين أدب و

ص من المحور الذي يدور المثلث حول  $A$  مسقط

القاعدة أب على المحور ص ص و ح مسقط نقطة

وسط الضلع  $ab$  ،  $a$  و  $a'$  مستقيمان موازيين المحور

فمن المعلوم ان السطح المتولد من دوران المستقيم AB

حول المحور اما أن يكون سطحاً مخروطياً كاملاً او ناقصاً

على حسب ما تكون نقطة  $a$  موجودة على المحور أو

متباعدة عنه وعلى كلا الحالتين يتحصل تمام على ما تقدم (٢٣٨) تنبيه و (٢٣٩) تنبيه أن سطح

$$u_1 x' x p_2 = u_1$$

غداً أن التلثين المتشابهين أو و ح د يُوخنفهما أن

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \text{ أو } \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

ومنه يتفصل

$$x'x = \bar{A} \bar{A}'$$

واذن يكون سطح  $ab = \tau$  ط ح د  $\times$  ا ب وهو المراد

نتیجہ - اذا وازی المستقیم اب المحور من ص تكون الفائدة بدیهة

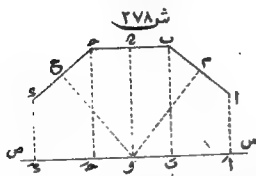
نظـر

(۳۴۳) السطح المتوازي من دوران جزء من محيط شكل منتظم حول محور مارة بمركزه يساوي حاصل

ضمن محيط الدائرة المرسومة داخله في مسقط جزء المضلع المذكور على المحور (شكل ٢٧٨)

ليكن  $أ ب د$  جزء المضلع المعلوم الذي مركزه  $و$  من محور الدوران  $أ د$  مسقط  
جزء المضلع المنتظم  $و م = و د = و ح$   
نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فعلى مقتضى

الفائدة السابقة نحصل



$$\text{سطح } أ ب = ٢ ط م \times أ ب \text{ و}$$

$$\text{سطح } ب د = ٢ ط د \times ب د \text{ و}$$

$$\text{سطح } د ح = ٢ ط ح \times د ح$$

و يجمع هذه المتساويات على بعضها يتوصل الى سطح المتولد من دوران جزء المضلع  $أ ب د$   
ويحدث سطح  $أ ب د = ٢ ط م \times أ د$  وهو المراد

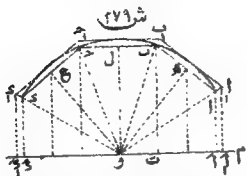
تنبيه - اذا كان جزء المضلع نصف محيط مسدس منتظم وكان نصف قطر الدائرة المرسومة  
عليه هو  $و$  ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله هو  $و$  فان مساحة السطح المتولد من  
دورانه تساوى  $٢ ط و \times ٢ و$  او  $٤ ط و \times و$  غير انه لما كان  $و = ٣٧$   
فتكون المساحة السطحية المذكورة مساوية الى  $٢ ط و \times ٣٧$  وبمثل ما ذكر يمكن الحصول  
على مساحة كل سطح متولد من دوران جزء من محيط أى مضلع منتظم سبق دراسته في الباب الثاني  
من الجزء الثاني

## تعريف

(٣٤٤) اذا اعتبرنا قوساً  $أ ب$  من نصف محيط دائرة وكان  $أ ب$  مسقطه على القطر  
وتصورنا دوران هذا القوس حول القطر المذكور فان المستقيمين  $أ ب$  و  $ب$  المسقطين  
لنقطتين  $أ$  و  $ب$  نهايتي القوس المقروض يرسمان ضرورة دائرتين عموديتين على المحور  
وأما القوس  $أ ب$  فانه يرسم سطحاً منحنيّاً محصوراً بين مستويي هاتين الدائرتين يسمى منطقة  
وحيث ان المنطقة هي جزء من سطح الكرة محصور بين مستويين متوازيين يسميان قاعدتيها  
وأما المستقيم  $أ ب$  الذي يديره البعدين المستويين فهو ارتفاعها  
اذا مر أحد نهايتي القوس  $أ ب$  بمحور الدوران بان كان أحد المستويين المتوازيين مماساً للكرة  
فان المنطقة تكون ذات قاعدة واحدة وتسمى في هذا الحالة طربوشاً كروياً  
واذا كبر القوس  $أ ب$  حتى يبلغ نصف محيطه بان كان مستويي القاعدتين مماسين للكرة فان المنطقة  
تصير مساوية في هذا الحالة لسطح الكرة

## نظرية

(٣٤٥) مساحة المنطقة تساوى حاصل ضرب محيط دائرة عظيمة في ارتفاعها (شكل ٢٧٩)



ليكن  $a$  القوس المولد للمنطقة و  $آ$  مسقطه على المحور  $د$  فإذا أريد تقويم مساحة المنطقة يقال لما كان هذا السطح منحنيًا ولا يمكن مقارنته مباشرة بوحدة السطوح المستوية قلنا للوصول الى المقصود أن نسلك هنا عين ما سلكته من قبل فنعتبره النهاية التي يقرب منها السطح المتولد من محيط جزء من شكل منتظم مرسوم اما

داخل القوس المتولد أو خارجه متى ضعف في عدد أضلاعه  $ا$  عدد أضلاعه  $د$  وكان هذا الاعتبار حقيقياً يجب أن نبرهن كما سبق على وجود تلك النهاية وانما ليست مرتبطة بنوع ما بالقانون المتبع في رسم المضلعات الداخلة والخارجة

فإذا كان  $ا ب د$  خطاً مضلعاً منتظماً مرسوماً داخل القوس  $ا$  عدد أضلاعه  $د$  وكان  $ا ب ج د$  خطاً مضلعاً آخر منتظماً مشابهاً مرسوماً خارجه بواسطة مماسات موازية للأضلاع  $ا ب$  و  $ب ج$  و  $ج د$  و... الخ فيكون مسقط  $ا ب د$  هو الخط الثابت  $آ د$  كما لا يخفى وأما مسقط المضلع  $ا ب ج د$  فهو الخط المتغير  $آ ب$  الذي يفرق عن المسقط  $آ د$  اما مجموع الخطين  $آ آ$  و  $د ب$  أو بالفرق بينهما وحيث ان مسقط أى خط هو أقصر منه غالباً فيفرق اذن المسقط  $آ د$  عن المسقط  $آ ب$  بكمية أقل من  $ا ب + د$  غير ان كل واحد من  $آ آ$  و  $د ب$  أقل من الفرق  $ا ب - د$  فيكون بداهة أقل من نصف ضلع من أضلاع المضلع الخارج واذن يفرق  $آ د$  عن  $آ ب$  بأقل من ضلع من أضلاع المضلع الخارج ولما كان هذا الفرق يزداد قرباً من الصفر كلما زيد في تضعيف عدد الأضلاع فتكون اذن نهاية  $آ ب$  هي  $آ د$

اذ اتقرر هذا وجعلنا  $س$  رمز النصف قطر الدائرة الراسمة للمنطقة و  $س$  لنصف قطر الدائرة المرسومة داخل المضلع المنتظم  $ا ب د$  و  $س$  رمز السطح المتولد من هذا الخط المضلع المذكور و  $س$  رمز السطح المتولد من محيط جزء المضلع المنتظم  $ا ب ج د$  فنحصل على مقتضى النظرية السابقة ان

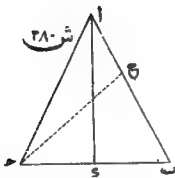
$$س = س \times آ د \quad و \quad س = س \times ط ب \times آ ب$$

ومنى زيدى العدد ٥ الى غير نهاية فان  $\infty$  و  $\infty$  يقربان من نهايتهما المشتركة ط ٢ ط ٢  
المحصورة بينهما الغير المرتبطة بالقانون الذى اتبع فى رسم المضلعان المنتظمة الداخلة والخارجة  
الآتخذ عدداً أضلاعهما فى الزيادة وحيث ان تلك النهاية هى المنطقة فتكون مساحتهما تساوى  
ط ٢ ط ٢  $\times$  ط ٢ ط ٢ = ط ٢ ط ٢ وهو المراد  
نتيجة - فى كرة واحدة أو فى كرات متساوية النسبة بين أى منطقتين كالنسبة بين  
ارتفاعيهما

### نظريه

(٢٤٦) المساحة المجمية للجسم المتولد من دوران مثلث حول محور خارج عنه وموجود معه  
فى مستوا واحد ومازى بأحد رؤسها تساوى حاصل ضرب السطح المتولد من الضلع المقابل لتلك  
الرأس فى ثلث الارتفاع المقابل له

(الحالة الاولى (شكل ٢٨٠)



فترض أولاً ان أحد أضلاع المثلث ب  $\infty$  مثلاً منطبق  
على المحور فنزل من النقطتين  $\infty$  و ا العمودين ج  $\infty$  و اء  
فالجسم المتولد من دوران المثلث  $\infty$  ا ب يتركب ضرورة  
من مخروطين ويحدث

$$\text{حجم } \infty \text{ ا ب} = \text{حجم } \infty \text{ اء} + \text{حجم } \infty \text{ اء}$$

$$\frac{1}{3} \text{ ط اء} (\infty + \infty) = \frac{1}{3} \text{ ط اء} \times \infty$$

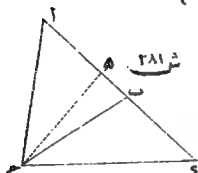
لكنه حيث كان الحاصلان  $\infty \times \text{ا ب}$  و  $\infty \times \text{ا اء}$  متساويين لدلالة كل واحد منهما  
على شئ واحد وهو ضعف مساحة المثلث ا ب  $\infty$  أمكن أن يوضع

$$\text{حجم } \infty \text{ ا ب} = \frac{1}{3} \text{ ط اء} \times \text{ا ب} \times \infty$$

ومن جهة أخرى حيث ان السطح المتولد من دوران الضلع ا ب هو سطح مخروطى ومساحته  
تساوى ط اء  $\times$  ا ب فبالاستعاض ب  $\infty$  فبالاستعاض ب  $\infty$

$$\text{حجم } \infty \text{ ا ب} = \text{سطح } \infty \text{ ا ب} \times \frac{1}{3} \text{ ط اء} \text{ وهو المراد}$$

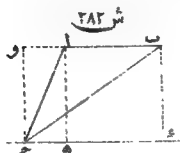
### الحالة الثانية (شكل ٢٨١)



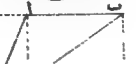
تقرض ان الضلع ب - غير منطبق على المحور وانما امتداد الضلع ا ب المقابل للرأس ج يقابله في نقطة د فيكون الجسم المتولد من دوران المثلث ا ب ج مساويا في هذه الحالة للفرق بين الجسمين المتولدين من دوران المثلثين ج ا د و ج ب د ويحدث

$$\begin{aligned} \text{حجم ا ب د} &= \text{حجم ح ا د} - \text{حجم ح ب د} \\ &= \text{سطح ا د} \times \frac{1}{3} \text{ ه د} - \text{سطح ب د} \times \frac{1}{3} \text{ ه د} \\ &= \text{سطح ا ب} \times \frac{1}{3} \text{ ه د} \text{ وهو المطلوب} \end{aligned}$$

### الحالة الثالثة (شكل ٢٨٢)



نفرض ان الضلع  $AB$  المقابل للرأس  $C$  مواز المحور ففي هذه الحالة لا يتأق تطبيق البرهنة المتقدمة لعدم موافقتها غيره محدث



$$\begin{aligned} \text{جیم ا د} &= \text{جیم ا د ه} + \text{جیم ا د س} \\ &= \text{جیم ح د} \text{ و يكون} \\ \text{جیم ا د} &= \frac{1}{4} \text{ ط ح د} \times \text{ح ه} + \frac{1}{4} \text{ ط ح د} \times \text{ح س} \\ &= \frac{1}{4} \text{ ط ح د} \times \text{ح د} \text{ أو} \\ &= \frac{1}{4} \text{ ط ح د} (\text{ح ه} + \text{ح س} - \text{ح د}) = \frac{1}{4} \text{ ط ح د} \times \text{ح د} \\ &= \frac{1}{4} \text{ ط ح د} \times \text{ح د} = \text{سطح ا} \times \frac{1}{4} \text{ ح د} \text{ وهو المراد} \end{aligned}$$

نظريّة

(۳۴۷) مساحة الحجم المتولد من دوران قطاع قاعدة مضلع منتظم تساوي حاصل ضرب



السطح المتولد من قاعدته مضروباً في ثلث نصف قطر الدائرة المرسومة داخله (شكل ٢٨٣)

ولكن ان وجد الخط المضع المتكامل قاعدة القطاع  
وذا، وه نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فانه  
يمكن تحليل القطاع المذكور الى حلة مثلثات متساوية

الساقين ومتساوية وعلى مقتضى النظرية المتقدمة تحصل المساحة الجسمية المتولدة من كل واحد منها وحاصل جمعها يدل على المساحة الجسمية المطلوبة

جسم و أ د = سطح أ ب  $\times \frac{1}{4}$  هـ و + سطح ب ج  $\times \frac{1}{4}$  هـ و  
 + سطح ج د  $\times \frac{1}{4}$  هـ و = سطح أ ب ج د  $\times \frac{1}{4}$  هـ و وهو المراد  
 نتيجة - المساحة الجسمية للجسم المتولد من دوران نصف ممد من منتظم حول قطره تكون  
 بناء على ما ذكر

م = سطح أ ب ج د  $\times \frac{1}{4}$  م = ٢ ط ب  $\times \frac{1}{4}$  م = ٣ ط ب  $\times \frac{1}{4}$  م = ٤ ط ب  
 وبمثل ما ذكر يسهل الحصول على مساحة كل جسم متولد من دوران جزء من مضلع أو أخرى  
 منتظمة يكون معلوم فيها أحد الأضلاع ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله

### تعريف

(٢٤٨) القطاع الكروي هو جزء من جسم الكرة يتولد من دوران قطاع دائري فهو شبيه  
 على منطقة  
 إذا آل القطاع الدائري إلى نصف دائرة فإن القطاع الكروي يكون مساويا لجسم الكرة

### نظرية

(٢٤٩) المساحة الجسمية للقطاع الكروي تساوي حاصل ضرب المنطقة قاعدته في ثلث نصف  
 القطر (شكل ٢٨٣)

والوصول إلى ذلك يقال ولوانه يتعذر مقارنته مباشرة بوحدة الأبعاد لأنه محدود بسطح منحني لكنا  
 مع ذلك نتوصل إلى الفرض باستعمال النهايات

فنرسم داخل القوس أ د خطا مضاعفا منتظما أ ب ج د عدد أضلاعه ٥ ونرسم آخر خارجيه  
 مشابها للآخر أ ب ج د (ولم يرسم منهما إلا الداخل فقط) ثم نجعل م مركز الجسم المتولد  
 من أ ب ج د و م مركز الجسم المتولد من أ ب ج د و م مركز الجسم المتولد من القطاع  
 ثم نقول

إن الجسم م أكبر من الجسم م لاشتماله عليه وأصغر من الجسم م لانحصاره فيه لكنني يحدث  
 على مقتضى النظرية السابقة أن

$$م = \text{سطح أ ب ج د} \times \frac{1}{4} \text{ هـ و} \quad م = \text{سطح أ ب ج د} \times \frac{1}{4} \text{ هـ و}$$



وقد سبق البرهنة على أن السطحين المتولدتين من  $ان ح د$  و  $اب ح د$  لهما نهاية مشتركة وهي المنطقة وكذلك مما تقدم أيضاً ان نهاية  $وه ه ي$  و  $وا$  فيكون اذن للمقدارين  $م م$  و  $م$  نهاية مشتركة وحيث ان  $م$  محصور بينهما فيكون هو تلك النهاية ويحدث

$م$  (القطاع الكروي) = المنطقة قاعدته  $\times \frac{1}{3}$   $م$  وهو المراد

نتيجة - اذا أبليت المنطقة بمقدارها المتقدم (٢٤٥) يحدث

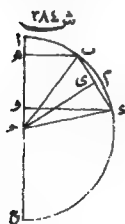
$$م = \frac{2}{3} ط م ع \quad (ع \text{ ارتفاع المنطقة})$$

### تعريف

(٢٥٠) الحلقة الكروية هي جزء من جسم الكرة يتولد من دوران قطعة دائرية محصورة بين قوس ووتره

### نظرية

(٢٥١) المساحة الجسمية لحلقة كروية تساوي سدس الدائرة التي نصف قطرها وتر القطعة



مضروب في مسقط هذا الوتر على محور الدوران (شكل ٢٨٤)

ليكن  $ب م د$  القطعة الدائرة حول المحور  $ا ح$  وليكن  $ب د$  وترها و  $ه و$  مسقطه على المحور فن المعلوم ان الجسم المتولد من القطعة مساو للفرق بين الجسمين المتولدين احدهما من القطاع

$ح د م$  وثانيهما من المثلث  $ح د ي$  ب غير ان

$$\text{جسم ح د م} = \frac{2}{3} ط م ع \times ه و \quad (٢٤٩) \quad و$$

$$\text{جسم ح د ي} = \frac{2}{3} ط ح ي \times ه و \quad (٢٤٦)$$

وباجراء الطرح يحدث

$$\text{جسم ب م د} = \frac{2}{3} ط (و ع - ح ي) ه و = \frac{2}{3} ط ب ي \times ه و$$

$$= \frac{1}{3} ط ب د \times ه و \quad \text{وهو المراد}$$

## الفصل الرابع

في الكرة

### نظرية

(٣٥٢) المساحة السطحية للكرة تساوى أربع دوائر عظام

وللبرهنة على ذلك يقال حيث انه تقدم (بمثلة ٣٤٤ تعرف) ان المنطقة تؤل الى سطح الكرة متى آل القوس المولدها الى نصف محيط دائرة أو آل ارتفاعها الى قطر الكرة فاذا أبدل في قانون المنطقة  $٢ ط م \times ع$  (٣٤٥) الارتفاع  $ع$  بالمقدار  $٢ م$  تحصل سطح الكرة

$$= ٢ ط م \times ٢ م = ٤ ط م^2 \text{ وهو المراد}$$

\* نتيجة - حيث قد علم مما سبق ان المثلث الكروي القائم الزوايا الثلاث هو ثمن الكرة

\* (٣٦٩ نتيجة) فتكون مساحته تساوى  $\frac{1}{8}$  ط م<sup>٢</sup> أعني نصف دائرة عظيمة

\* تنبيه - حيث ان مساحة المثلث الكروي القائم الزوايا الثلاث قد علت بالنسبة للمربع

\* المأخوذ ووحدة في تيسر ان معرفة النسبة الكائنة بين مساحة أى مضلع كروي وبين هذا

\* المربع متى علت زواياه

### نظرية

(٣٥٣) المساحة المجمية للكرة تساوى أربعة أثلاث النسبة ط في مكعب نصف قطرها

أو تساوى سدس النسبة في مكعب قطرها

وللبرهنة على ذلك يقال حيث انه تقدم (بمثلة ٣٤٨) ان القطاع الكروي يؤل الى جسم

الكرمى آل القطاع الدائرى المولده الى نصف دائرة وفي هذه الحالة تؤل المنطقة فاعده الى

سطح الكرة وبناء عليه اذا أبدل في قانون القطاع المنطقة بسطح الكرة تحصل

$$\text{حجم الكرة} = \text{سطح الكرة} \times \frac{1}{3} م = ٤ ط م^2 \times \frac{1}{3} م = \frac{4}{3} ط م^3 \text{ أو } = \frac{1}{6} ط م^3$$

وهو المراد

### تعريف

\* (٣٥٤) الضلع الكروي هو جزء من جسم الكرة محصور بين نصفي دائرتين عظيمتين وكل

\* ضلع كروي تكون فاعده شقة

## نظريية

- \* (٣٥٥) مساحة الضلع الكروي تساوى حاصل ضرب الشقة قاعدته في ثلث نصف القطر  
\* والبرهنة على ذلك يقال اذا جعل ١ رمز الزاوية الضلع الكروي منسوبة الى الزاوية  
\* القائمة فانه يحدث بداهة ان

$$\frac{\text{الضلع الكروي}}{\text{حجم الكرة}} = \frac{١}{٤ \text{ قاعة}} \text{ أو } \frac{١}{٤ \text{ قاعة}}$$

$$\frac{\text{الضلع الكروي}}{٤} = \frac{٤}{٣} \times \frac{١}{٤ \text{ قاعة}} \times \frac{١}{٤ \text{ قاعة}} \times \frac{١}{٤ \text{ قاعة}}$$

- \* لكن المقدار ٤ ط س ٢ =  $\frac{١}{٤ \text{ قاعة}}$  أو سطح الكرة  $\times \frac{١}{٤ \text{ قاعة}}$  يدل بداهة على سطح الشقة  
\* فتكون مساحة الضلع الكروي مساوية الى الشقة  $\times \frac{١}{٣}$  وهو المطلوب

## تعريف

- \* (٣٥٦) اذا وصل بين مركز الكرة ورؤس مضلع كروي بمستقيمت فانه يتشكل من ذلك  
\* ما يسمى بالهرم الكروي

## نظريية

- \* (٣٥٧) المساحة المجمية للهرم الكروي تساوى حاصل ضرب سطح قاعدته في ثلث نصف  
\* قطر الكرة  
\* الحالة الاولى - اذا كان الهرم ثلاثيا فانه يسهل البرهنة  
\* أولا - على أن الهرمين الثلاثيين المتماثلين متكافئان لامتكان تركبهما من اهرامات ثلاثية  
\* متساوية ذات الوجهين المتساويين كما جرى ذلك في المثلثين الكرويين  
\* ثانيا - على أنه اذا تقاطع دائرتان عظيمتان في نصف كرتواحدة فالهرمان الحادثان اللذان  
\* فيهما زاويتان زوجيتان متساويتان مشتركتان في الحرف يكون مجموعهما مساويا للضلع  
\* الكرة المنسوبة اليه احطى الزاويتين الزوجيتين المذكورتين لان الهرم المتماثل لاي الهرمين  
\* المذكورين يكمل ضلع الكرة الذي يكون الهرم الثاني جزءا منه

\* اذاقرر هذا واعيدت البراهين التي سبق ايرادها عند تقويم المساحة السطحية للمثلث الكروي (٢٧٦) على الهرم الثلاثي الكروي تحصل

$$\text{هرم ثلاثي كروي} = \frac{\text{ضلع } ١ + \text{ضلع } ٢ + \text{ضلع } ٣}{٢} - \frac{١}{٤} \text{ كره}$$

\* وعلى ماقرر (بمرة ٣٥٥) يحدث

$$\text{هرم ثلاثي كروي} = (\text{شقة } ١ + \text{شقة } ٢ + \text{شقة } ٣ - \text{شقة قاعته}) \times \frac{٣}{٢}$$

\* وحيث ان الكمية الموجودة بين القوسين تدل على مساحة المثلث الكروي فاعدة الهرم

الثلاثي (٢٧٦) يحدث

$$\text{هرم ثلاثي كروي} = \text{القاعدة} \times \frac{٣}{٢} \text{ وهو المطلوب}$$

\* الحالة الثانية - اذا كان الهرم أيا كان فانه يمكن تقسيمه الى اهرامات ثلاثية وبأخذ

مساحتها وضعتها الى بعضها يتوصل الى المطلوب

\* نتيجة - اذا وصل بين مركز الكرة وجميع نقاط دائرة صغيرة بمستقيمت تكون من ذلك

ما يسمى بالخطوط الكروي

\* ويسهل البرهنة بطريق النهايات على أن المساحة الجسمية له تساوى حاصل ضرب قاعدته

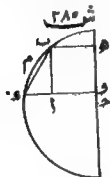
في ثلث نصف القطر

## نظريية

(٢٥٨) المساحة الجسمية للقطعة الكروية تساوى مساحة الكرة التي قطرها ارتفاع القطعة

زائد مساحة الجسم الاسطواني المصمم للقطعة في الارتفاع وقاعدته نصف مجموع قاعدتي

القطعة (شكل ٢٨٥)



ليكن المطلوب تقويم المساحة الجسمية المتولدة من دوران شبه المنحرف

هـ م د و الذي أحد أضلاعه متص حول المحور هـ و

يتولد ب ا موازيا للمحور فالجسم المطلوب يكون مساويا ضرورة

لمجموع الجمين المتولدين أحدهما من القطعة الدائرية م د و وثانيهما

من شبه المنحرف هـ م د و فيحدث

$$\text{جسم م د و} = \frac{١}{٢} \text{ ط ب د} \times \text{هـ و} \text{ (٢٥١) و}$$

$$\text{جسم هـ م د و} = \frac{١}{٢} \text{ ط (ب هـ + د و + ب هـ} \times \text{د و) هـ و (٢٤١ نتيجة ١)}$$

وبالجمع يحدث

حجم القطعة =  $\frac{1}{4} ط (د + ٢ هـ + ٢ د + ٢ هـ + د)$  و  $٢ هـ \times د$  هو  
ويؤخذ من المثلث القائم الزاوية  $د هـ$  أن

$$د هـ = د هـ + (د - هـ) = ٢ هـ + د + د - هـ = ٢ د + د هـ$$

وباستعاض  $د هـ$  من القانون السابق بما يساويه يحدث

$$\text{حجم القطعة} = \frac{1}{4} ط (د هـ + ٢ د + ٢ هـ) \times د هـ$$

ومع التحليل والاختصار يحدث

$$\text{حجم القطعة} = \frac{1}{4} ط هـ + \frac{1}{4} ط (د + هـ) هـ \text{ وهو المراد}$$

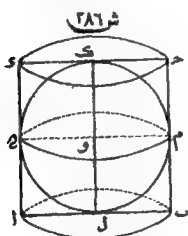
نتيجة - اذا افعلت احدى القاعدتين بأن كانت القطعة ذات قاعدة فقط فان المساحة  
الاجمية لها تساوى الكرة التى قطرها ارتفاع القطعة زائد انصف الاسطوانة المتصلة مع القطعة  
فى القاعدة والارتفاع

## نظريّة

(٢٥٩) نسبة سطح الكرة الى السطح الكلى للاسطوانة المرسومة عليها كالتسبة بين العددين

٢ و ٣ والنسبة بين حجمهما كالتسبة بين العددين

المذكورين (شكل ٢٨٦)



ليكن  $م ل ك$  دائرة عظيمة و  $ا ب د$  مربعا

مرسوما خارجها ونصوّنا دوران كل من نصف الدائرة

ونصف المربع حول المحور كل فانه عند ما ترسم نصف

الدائرة الكرة يرسم نصف المربع الاسطوانة

برهان الاول - حيث ان قاعدة الاسطوانة مساوية

دائرة عظيمة وارتفاعها مساو لقطر الكرة فتكون مساحتها

السطحية الجائية مساوية الى  $٤ ط م$  ويضم الى ذلك مساحة القاعدتين أو  $٢ ط م$  تكون

المساحة الكلية لسطح الاسطوانة مساوية الى  $٦ ط م$  واذن يكون

$$\frac{\text{سطح الكرة}}{\text{سطح الاسطوانة}} = \frac{٤ ط م}{٦ ط م} = \frac{٢}{٣}$$

برهان الثاني - يقال ان المساحة الجسمية للاسطوانة تساوى ط ب  $\times$  ح  $\div$  ٢ = ط ب  $\times$  ح  $\div$  ٢ ويكون  
المساحة الجسمية للكرة تساوى  $\frac{4}{3}$  ط ب  $\times$  ح ويكون

$$\frac{\text{الكرة}}{\text{الاسطوانة}} = \frac{4}{3} : 2 = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ وهو المراد}$$

تنبيه - اذا تصورنا جسما كثيرا السطوح مرسوما على الكرة أى أن جميع أوجهه عماسة  
لسطحها فان حجمه يتركب من اهرامات تكون رؤسها بمركز الكرة وقواعدها الالوجه المختلفة لكثير  
السطوح وأما ارتفاعها المشترك فهو مساو لنصف قطر الكرة واذن فيكون حجم كثيرا السطوح  
مساويا لسطحه مضروباً في ثلث نصف القطر وبناء عليه تكون النسبة بين أحجام كثيرات السطوح  
المرسومة على الكرة كالنسبة بين سطوحها

## تظريية

\* (٣٦٠) نسبة سطح الكرة الى سطح المخروط المتساوى الاطراف المرسوم عليها (أى الذى  
قطر قاعدته مساو لارتفاعه) كالنسبة بين العددين ٤ : ٩ والنسبة بين حجميها كالنسبة بين  
عين هذين العددين (شكل ٢٨٧)



\* ليكن م د ل دائرة عظيمة قد رسم عليها المثلث  
المتساوى الاضلاع ا ب ج ثم تصورنا دوران نصف  
الدائرة ونصف المثلث معاً حول القطر ا م فانه عند  
ما يرسم نصف الدائرة جسم الكرة يرسم نصف المثلث  
م ا ج مخروطاً متساوى الاطراف

\* برهان الاول - من المعلوم ان السطح الجانبي للمخروط  
يساوى ط م  $\times$  ح و باستعاض م د و ا ح  
بمقدارهما م د و ح يكون السطح الجانبي للمخروط مساوياً الى ط ب  $\times$  ح  
وإذا أضفنا الى ذلك مساحة القاعدة وهى ٢ ط ب  $\times$  ح يكون السطح الكلى للمخروط مساوياً  
الى ٩ ط ب  $\times$  ح ويحدث

$$\frac{\text{سطح الكرة}}{\text{سطح المخروط}} = \frac{4}{9}$$

\* وأما برهان الثاني وان كان يمكن استنتاجه من تبيينه غرة (٣٦٠) فمع ذلك نقول ان المساحة

\* الحجمية للمخروط =  $\frac{1}{3} \times \text{م} \times \text{م}^2$  لكن  $\frac{21}{20} = \frac{21}{20}$  أو  $\frac{21}{20} = \frac{21}{20}$  أو  $\frac{37.5}{20} = \frac{21}{20}$

\*  $\text{م} = 3$  وتكون مساحة حجم المخروط مساوية الى  $3 \text{ م}^2$  أو  $9 \text{ م}^2$

\* ويبحث  $\frac{\text{الكرة}}{\text{المخروط}} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$  وهو المراد

## الفصل الخامس

### تمرينات

١ - المطلوب تعيين نصف قطر قاعدة اسطوانة اذا كانت مساحتها السطحية الجانبية تساوي ٦٠ مترًا مربعًا وكان ارتفاعها مساويًا ١٢٠ مترًا

٢ - اذا لزم لطلاء السطح الجانبي لاسطوانة قطر قاعدتها ٢٠ مترًا وارتفاعها ٨٠ مترًا مقدار ستيمترين مكعبين من الذهب والمطلوب معرفة سمك طبقة الطلاء

٣ - ما يؤول اليه حجم الاسطوانة اذا ضعف ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها

٤ - اذا دل العدد ١٩,٢٦ على الثقل النوعي للذهب وأريد تصنيع عمود بصفائح من الذهب ارتفاعه يساوي ثلاثة أمتار ونصف قطر قاعدته يساوي ٢٠ مترًا فما مقدار زينة الذهب اللازم لذلك اذا كان سمك الصفائح يعادل ٠,٠٠١ متر

٥ - المطلوب تعيين زينة الزئبق الموجود داخل اناء اسطوانتي قطر قاعدته ٢٠ مترًا وارتفاعه ١٣,٦ مترًا اذا كان الثقل النوعي للزئبق يعادل ١٣,٦

٦ - اذا كانت أسطوانة من الزنجار وزن ٨٠ غرامًا وهي فارغة قمتي وضع فيها زئبق بارتفاع ٤٠ مترًا فما مقدار زينة الزئبق والمطلوب معرفة قطر قاعدة الاسطوانة اذا كان الثقل النوعي للزئبق يعادل ١٣,٥٩٨

٧ - اذا قطع مخروط ارتفاعه متران ومساحة قاعدته متر مربع مستو مواز قاعدته على بعد ٨٠ متر من رأسه والمطلوب معرفة سطح القطع

٨ - على أي بعد من رأس مخروط ارتفاعه متران ونصف قطر قاعدته ٤٠ مترًا يجب قطعه بمستو مواز قاعدته ليكون نصف قطر القطع مساويًا ٣٠ مترًا

٩ - ما يؤول اليه حجم مخروط اذا ضعف ارتفاعه ونصف قطر قاعدته

- ١٠ - إذا كان حجم المخروط يساوى ٦٠ متر مكعبا وارتفاعه يساوى ثمانية أمتار والمطلوب حساب سطحه الجانبي
- ١١ - إذا كان نصف قطر قاعدة مخروط يساوى مترين وارتفاعه يساوى ثمانية أمتار والمطلوب حساب حجمه
- ١٢ - إذا قطع مخروط ارتفاعه خمسة أمتار بمستو مواز قاعدته على بعد مترين من رأسه وكان نصف قطر القطع الحادث مساويا ٤٠ متر والمطلوب حساب حجمه
- ١٣ - إذا قطع مخروط ارتفاعه ستة أمتار ومساحته الحجمية عشرة أمتار مكعبة بمستو مواز قاعدته على بعد مترين من رأسه والمطلوب حساب السطح الجانبي للمخروط الناقص
- ١٤ - على أى بعد من رأس مخروط حجمه يساوى ٣٨٧ متر مكعبا وارتفاعه ٢٠ متر يجب قطعه بمستو مواز قاعدته لتكون المساحة الحجمية للمخروط المحذوف مساوية ٩٥ متر مكعبا
- ١٥ - إذا كان ارتفاع مخروط ناقص مترين ونصف قطر قاعدته السفلى ٧,٣٠ متر ونصف قطر قاعدته العليا ٣,٥٠ متر والمطلوب حساب السطح الجانبي للمخروط الكامل وحجمه
- ١٦ - المطلوب حساب السطح الحادث من دوران المستقيم  $AB = ٥$  متر حول محور كان معه فى مستوا واحد وكان بعدانها يتبع عن المحور مساويين ٣ متر و ٤ متر
- ١٧ - المطلوب حساب السطح الحادث من دوران محيط مثلث متساوى الاضلاع حول أحد أضلاعه  $AB = ٥$  متر
- ١٨ - المطلوب حساب ارتفاع منطقة مساحتها تساوى دائرة عظيمة ونصف قطر الكرة التى هى جرم من سطحها مساو سبعة أمتار
- ١٩ - المطلوب حساب الحجم المتولد من دوران مثلث متساوى الاضلاع أحد أضلاعه  $AB = ٥$  متر حول محور مار برأسه ومواز قاعدته
- ٢٠ - المطلوب حساب حجم القطاع الكروى إذا كانت مساحة المنطقة قاعدته تساوى مترا مربعا ونصف قطر الكرة مساويا مترا
- ٢١ - المطلوب حساب حجم المكعب المرسوم داخل الكرة التى نصف قطرها خمسة أمتار وبالعكس
- ٢٢ - ما يؤهل إليه سطح الكرة وحجمها إذا ضوعف نصف قطرها
- ٢٣ - المطلوب حساب سطح الشقة التى يعادل مقدار زاويتها ٢٨° ونصف قطر الكرة يساوى أربعة أمتار
- ٢٤ - المطلوب حساب زاوية الشقة إذا عادت مساحتها مترا مربعا وكان نصف قطر الكرة مساويا ٥٠ متر مربعا



## الباب الثاني

في القطاعات المخروطية والمتحنى البرمى

\* يطلق اسم القطاعات المخروطية على القطع الناقص والقطع المكافئ والقطع الزائد

### الفصل الاول

في القطع الناقص

#### تعريفات

(٣٦١) القطع الناقص هو محل النقط التي يكون مجموع بعدى كل واحدة منها عن نقطتين ثابتتين فيه ثابت دائماً (شكل ٢٨٨) النقطتان الثابتتان تسميان بالبورتين ورمز لهما هنا بالرمزين  $\epsilon$  و  $\epsilon'$

بعد أى نقطة من نقط القطع الناقص عن أى واحدة من البورتين يسمى نصف قطر بوريا ويرمز هنا لنصف القطرين البورتين لى نقطة بالرمزين  $\nu$  و  $\nu'$

والمقدار الثابت الدال على مجموع نصفي القطرين البورتين لى نقطة يسمى هنا بالمقدار  $\rho$  وأما البعدين البورتين فيسمى بالمقدار  $\rho'$

(٣٦٢) مماس القطع الناقص فى أى نقطة هو نهاية الاوضاع التي يأخذها طاع متحرك مار بهذه النقطة وبأخرى تقرب منها شيئاً فشيئاً الى غير نهاية

### المبحث الاول

فى رسم القطع الناقص

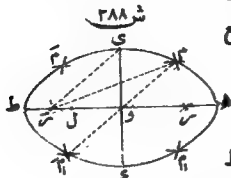
#### عملية

(٣٦٣) المطلوب رسم القطع الناقص

الطريقة الاولى - وهي رسمه نقطة فنقطة (شكل ٢٨٨)

(٤) القصة البهية (رابع)

ليكن  $\alpha$  و  $\beta$  البورتين و  $\alpha$  المجموع الثابت و  $\beta = \alpha$  و  $\gamma$  وسط  $\alpha\beta$   
 فنأخذ البعدين  $\alpha\gamma$  و  $\beta\gamma$  و  $\gamma$  وسط  $\alpha\beta$  و  $\gamma$  من قاطع  
 الناقص لان



ثم نقسم من نقطة و عمودا غير محدود على المستقيم هـ ط  
ونجعل احدي البورتين مركزا ونرسم محيط دائرة نصف  
قطرها سا ا فيقطع العمود في النقطتين ي و د تكونان ايضا من نقط المحي لان

إذا جعل  $b$  رمزاً للبعد وى حدث  $A = b + c$   
 ثم إذا فرضت نقطة مثل  $l$  على المستقيم  $هـ ط$  وجعلت نقطة  $س$  مركزاً ورسم محيط دائرة  
 بنصف قطر مساو  $ط ل$  وجعلت بذلك نقطة  $س$  مركزاً ورسم محيط دائرة أخرى بنصف قطر  
 مساو  $هـ ل$  فإن هذين المحيطين يتقاطعان في نقطتين  $م$  و  $ن$  تكونان من نقط المتخني  
 ومقتلني الوضع بالنسبة للمستقيم  $هـ ط$

ثم إذا أبيل نصف القطر ين بعضهما مع عدم تغير المركزين فانما توصل أيضا إلى نقطتين جديدتين  $\mathcal{M}$  و  $\mathcal{M}'$  من نقط المخفى تمامًا إلى الوضع أيضا بالنسبة للمستقيم  $\mathcal{H}\mathcal{U}$  ومائتين للنقطتين  $\mathcal{M}$  و  $\mathcal{M}'$  بالنسبة للمستقيم  $\mathcal{U}\mathcal{Y}$  وبإعادة مثل هذه العملية مرارا فانه يتوصل في كل مرة إلى أربع نقط من نقط المخفى متماثلة مثنى بالنسبة لكل واحد من المستقيمين  $\mathcal{H}\mathcal{U}$  و  $\mathcal{U}\mathcal{Y}$  فإذا وصلت جميع النقط المتحصلة بخط فانه تشكل مخفى القطع الناقص المطلوب

تبيينه ١ - حيث ان جميع قطر المعنى مقالته مثني بالنسبة لكل واحد من المستقيمين  
هـ ط و ي ، فيسمى المستقيمان المذكوران من أجل ذلك بمعزى تماثل المعنى

تتبعه ٢ - حيث ان الاضلاع المتقابلة من الشكل الرباعي  $ABCD$  متساوية فيكون متوازي الاضلاع وحيث ان قطريه  $AC$  و  $BD$  يتقاطعان في نقطة  $O$  فتكون هذه النقطة وسطا لجمع أوتار المنحنى المارة بها ولذا تسمى هذه النقطة بمركز المنحنى

نتيجه ٣ - حيث ان انتخاب نقطة ل على المحور  $\theta$  يستلزم تقاطع محيطي الدائرتين اللذين مركزاهما  $s$  و  $s'$  فبما أن يكون المربعين المركزين  $s$  و  $s'$  أصغر من مجموع نصفي

القطرين ٢١ و ٢٢ كبر من قاضلها أما الشرط الأول فهو محقق لان  $a < b$  وحينئذ فلنحقق الشرط الثاني يجب أن يكون  $OL > a$  أعني أنه يجب أخذ نقطة  $L$  بين النقطتين  $a$  و  $b$  ومن هنا يعلم ان مقدار نصف القطر البوري يتغير بين المقدارين  $a - b$  و  $a + b$  نتيجة - يمكن أن يستخرج مما ذكرنا  $هـ ط$  هو المحور الأكبر للقطع الناقص وان  $د$  هو محوره الأصغر وذلك لانه يؤخذ من المثلث  $م د هـ$  ان

$$\begin{aligned}ص ٢ + ص ٢ &= ٢ م و + ٢ هـ \text{ أو } ٢ م و = ص ٢ + ص ٢ - ٢ هـ \text{ أو} \\٢ م و &= ص ٢ + ص ٢ - ٢ هـ \text{ أو } ص ٢ - ٢ هـ = ص ٢ - ٢ هـ \text{ أو } ص ٢ - ص ٢\end{aligned}$$

فإذا جعل  $٢ هـ$  رمز الفرق بين نصفي القطرين البورين أمكن أن يوضع  
 $ص ٢ = ا + ع$  و  $ص ٢ = ا - ع$  أو  $ص ٢ = ا - ع$  وان يكون  $م و = د + ع$   
 ثم يقال حيث ان النهاية العظمى للكمية  $ع$  هي  $د$  فتكون النهاية العظمى للمقدار  $م و$   
 هي  $ا$  وكذا حيث ان النهاية الصغرى للكمية  $ع$  هي صفر فتكون النهاية الصغرى للمقدار  
 $م و$  هي  $ب$  ولهذا يسمى  $هـ ط$  بالمحور الأكبر و  $د$  بالمحور الأصغر وتسمى النقط  
 $هـ و ط و د$  بالرؤس

الطريقة الثانية - وهي طريقة رسمه دفعة واحدة  
 اذا أخذنا خط طوله  $ا$  وثبت طرفاه في البورين  $ا$  و  $ب$  وشد بواسطة من قلم راسم يتحرك  
 فانه يتشكل من ذلك القطع الناقص المطلوب

وذلك لان مجموع نصفي القطرين البورين لكل نقطة من نقطة مساوية  $ا$  وهذه طريقة يكثر  
 استعمالها على الارض دون الرسم على الورق لعدم امكان الوصول بواسطتها الى رسم النقط المجاورة  
 للمستقيم المار بالبورين مع الضبط الكافي حيث انه عندما يتأخر جزأ الخط فان أحدهما  
 لا يكون مستقيما وازيادة على ذلك فانه متى رسم نصف القطع الناقص يحتاج الامر الى رفع القلم  
 الرسم ونقل الخط الى الجهة الثانية للبورين لرسم النصف الثاني منه

غير انه يسهل تصحيح الضرر الأخير بواسطة استعمال خط دائري وله مساوية  $ا + ٢$  بان  
 يثبت برتان في البورين ويحاط بهما الخط المذكور ويشد شدانا سبوا بواسطة من القلم الرسم  
 ويحرك حتى يتم رسم القطع الناقص

نتيجة - اذا اتحد البورتان  $ا$  و  $ب$  فان المحل الذي يرسمه القلم يكون محيط دائرة وحينئذ  
 فالدائرة هي قطع ناقص بورتاه متحدتان

الطريقة الثالثة - وهي طريقة تقريبية (شكل ٢٨٩)  
يمكن أن يتوصل بواسطة أقواس دوائر متقاطعة إلى رسم شكل تقرب صورته من القطع الناقص



فإذا كان  $و هـ = أ$  و  $د = ب$  نصفي القطرين  
اليورين للقطع الناقص المراد رسمه عند  $د$  على  
استقامته ويؤخذ منه البعد  $و هـ$  ثم يؤخذ  
 $د ل = د ك = أ - ب$  ويقام العمود  $م ي$   
على وسط المستقيم  $هـ ل$  ثم يجعل كذلك على  
المستقيم  $د هـ$  ويتم بعد ذلك المعين  $ي ع ي$   
وتعد أضلاعه على استقامته ثم تجعل كل واحد من  
النقطتين  $ي و ي$  مركزاً ونصف قطر مساو

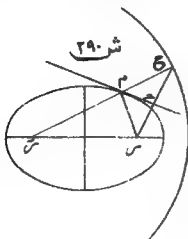
$ي د$  يرسم قوسا الدائرتين  $م د م$  و  $م د م$  وتجعل أيضا النقطتان  $ع و ع$  مركزين  
ونصف قطر مساو  $ع م$  يرسم القوسان  $م م$  و  $م م$  فيمران تقريبا بالنقطتين  $هـ و هـ$   
ولا يكون الشكل الحادث هو القطع الناقص المطلوب وإنما يفرق عنه بقليل

## المبحث الثاني

في بعض نظريات مهمة

### نظرية

(٣٦٤) القطع الناقص هو محل النقط المتساوية البعد عن نقط محيط دائرة وعن نقطة ثابتة  
فيه (شكل ٢٩٠)



لتكن  $م$  إحدى نقط القطع الناقص الذي يورناه  
 $س$  و  $ع$  وليكن  $أ$  مجموع نصفي القطرين  
اليورين لها بحيث يكون  $س م + م ع = أ$   
فيمد  $س م$  على استقامته مؤاخذه عليه البعد  
 $م ع = س م$  فالنقطتين  $س ع$  يكون مساويا  
 $أ$  واذن فهو ثابت المقدار وتكون نقطة  $ع$   
موجودة على محيط دائرة نصف قطرها مساو  $أ$





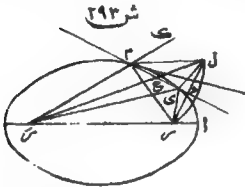
تبيح - حيث أنه لا يمكن أن يمد من نقطة  $\odot$  الخارجة عن محيط الدائرة الامساك له  
 $\odot$  ط و  $\odot$  ط فلا يمكن إذن للمستقيم أن يقابل محيط القطع الناقص الا في نقطتين وبذلك  
 يكون القطع الناقص محبداً

## المبحث الثالث

في تماس القطع الناقص

### تظهيرية

(٣٦٧) مماس القطع الناقص في نقطة ما ينصف الزاوية الواقعة بين أحد نصفي القطرين  
 البورين لنقطة التماس وامتداد نصف قطرها



البوري الثاني (شكل ٢٩٣)

ليكن  $م$  ي قاطعاً للمحني ماراً بنقطة  $م$  وبأخرى  
 قريبة جداً منها فإذا عيننا نقطة  $ل$  الماثلة الى  $م$   
 بالنسبة للقاطع  $م$  ي ووصلنا بينها وبين نقطة  $س$   
 بالمستقيم  $ل$  س وكانت  $ع$  نقطة تقابل هذا  
 المستقيم بالقاطع  $م$  ي حدث  $س$  ع ل = س ع م

وحيث ان النقطتين  $م$  و  $ي$  ممازتان عن بعضهما فتكون نقطة  $ع$  ممازة بالاقبل عن  
 احدهما  $ي$  مثلاً فيصحت

$$س ع ل > س ع ي \text{ ل } أو س ع ي > س ع ل \text{ أو } ل > ي$$

واذن فتكون نقطة  $ع$  ممازة أيضاً عن نقطة  $م$  وموضوعه داخل القطع الناقص ضرورة بين  
 $م$  و  $ي$

اذا تقرر هذا يقال حيث ان القاطع منصف للزاوية المتكوّنة من  $س$  وامتداد  $س$  ع فإذا  
 قربت اذن نقطة  $ي$  من نقطة  $م$  فان القاطع يقرب نحو المستقيم  $م$  ط المنصف للزاوية  
 المتكوّنة من المستقيم  $م$  وامتداد  $س$  م وحينئذ فيكون المماس في نقطة  $م$  الذي هو  
 على مقتضى التعريف نهاية لاوزاع القاطع المتحرك متساوي الميل على نصفي القطرين البورين  
 لهذه النقطة وهو المراد





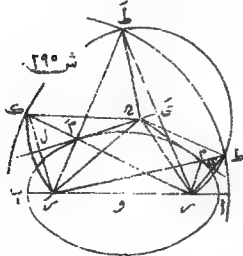
فان المثلثين ط م ي و ي م ر يجب أن يكونا متساويين لتساوي زاويتي والضلعين المحيطين بهما من أحدهما النظائرهما من الثاني واذن يكون س ط عمودا على ي ي أ وعلى ح وبنا عليه فتعين نقطة ط بتقاطع مستقيم معين بمحيط دائرة ومضى علمت فانها تعيين نقطة م أيضا في تقاطع س ط مع العمود المقام على س ط وحيث انها توجد نقطة أخرى ط مناظرة لنقطة ط فيوجد اذن للمسئلة حلان

تنبيه - ويمكن الوصول الى حل هذه المسئلة بالبحث عن وضع نقطة ي الكائن في تقاطع الدائرة التي قطرها ل د مع العمود النازل من نقطة س على الاتجاه المعلوم ح لانه متى تعين وضعها يتعين أيضا وضع المماس ي ي أ وأما نقطة التماس فانها تتعين بواسطة م د ي حتى يقابل الدائرة الدليلة في نقطة ط ثم وصل ط س وبواسطة تعيين نقطة ي التي هي النقطة الثانية لتقابل العمود س ط بمحيط الدائرة الذي قطره ل د يمكن الوصول الى حل ثان للمسئلة ويمكن الوصول الى هذا الحل الثاني اذا اجريت على البورة س أعمال مثل التي اجريت على البورة س

نتيجة - ومما يسهل مشاهدته هو ان نقطتي التماس موجودتان على نهايتي قطر القطع الناقص م م وذلك لان الشكل س م س م متوازي الاضلاع لتساوي أضلاعه المتقابلة

## عملية

(٢٧٠) المطلوب تمرير مماس للقطع الناقص من نقطة د الخارجة عنه (شكل ٢٩٥)



نفرض ان المسئلة محولة وان د م هو المماس المطلوب تعيينه وان م هي نقطة تماسه المطلوب البحث عنها أيضا فاذا وصل س م وسد على استقامته وأخذ م ط = س م يظهر ان معرفة نقطة ط كاف لتعيين نقطة م فتعتبرها اذن كأنها النقطة المطلوبة

وحيث ان س ط = س أ فتوجد نقطة ط على الدائرة الدليلة للبورة س ومن جهة أخرى

حيث ان د م منصف للزاوية س م ط فيكون عمودا على وسط المستقيم س ط قاعدة المثلث المتساوي الساقين س م ط ويكون د ط = د س وبذلك توجد نقطة ط على

محيط الدائرة الذي مركزه  $\odot$  ونصف قطره  $\odot$   $r$  واذن فتوجد في تقاطع محيطي دائرتين معلومتين ولما كان هذان المحيطان يتقاطعان دائماً في نقطتين  $\odot$   $P$  و  $\odot$   $Q$  فتقبل المسئلة اذن حلين  $\odot$   $M$  و  $\odot$   $N$

تنبيه - من المفيد مناقشة شروط امكان حل هذه المسئلة فنقول من المعلوم ان امكان حل المسئلة يتوقف على تقاطع المحيطين بمعنى أن يكون البعد بين مركزيهما  $\odot$   $r$  أصغر من مجموع نصفى القطرين  $\odot$   $12$  و  $\odot$   $r$  وأكبر من فاصلهما أولاً - اذ لم تكن نقطة  $\odot$  على المستقيم  $\odot$   $r$  فانه يتأتى وجود المثلث  $\odot$   $r$  ويحدث

$$\odot r > \odot 12 + \odot r$$

ثانياً - اذا وجدت  $\odot$  خارج القطع الناقص على امتداد  $\odot r$  تحصل

$$\odot r = \odot 12 \pm \odot r > \odot 12 + \odot r$$

وبناء عليه يكون الشرط الأول محققاً دائماً كلما كانت نقطة  $\odot$  خارجة عن  $\odot r$

ثالثاً - اذا كانت  $\odot$  خارجة عن القطع الناقص وكان  $\odot 12 < \odot r$  فن المعلوم ان

$$\odot r + \odot 12 < \odot r \text{ أو } \odot r < \odot 12 - \odot r$$

رابعاً - اذا كان  $\odot r < \odot 12$  فان النقطة تكون خارج القطع الناقص ضرورة لانه يحصل بدهاهة  $\odot r + \odot 12 < \odot r$  فاذا لم تكن على امتداد  $\odot r$  تحصل من المثلث  $\odot r$  ان

$$\odot r < \odot 12 - \odot r < \odot 12 - \odot r$$

خامساً - اذا وجدت  $\odot$  على امتداد  $\odot r$  مع فرض ان  $\odot r > \odot 12$  تحصل

$$\odot r = \odot 12 \pm \odot r \text{ أو } \odot r < \odot 12 - \odot r$$

وبالجملة فكلما كانت  $\odot$  خارجة عن القطع الناقص فان المحيطين يتقاطعان ويكون للمسئلة حلان

سادساً - اذا كانت  $\odot$  على القطع الناقص تحصل  $\odot r = \odot 12 - \odot r$  وهذا يدل على ان محيطي الدائرتين يتماسان وبذلك لا يكون للمسئلة الا حل واحد

سابعاً - اذا كانت  $\odot$  داخل القطع الناقص تحصل  $\odot r > \odot 12 - \odot r$  وهذا يدل على تباعد المحيطين في الداخل وبذلك لا يكون للمسئلة حلول مطلقاً

## نظـرية

\* (٣٧١) المستقيم الواصل بين نقطة تقاطع عماسين للقطع الناقص وبين احدى بورتيه  
 \* ينصف الزاوية الواقعة بين نصفي القطرين البورين الواصلين بين نقطتي التماس والبورة  
 \* المذكورة (شكل ٢٩٥)

\* ليكن  $\angle م$  و  $\angle م$  مماسي القطع الناقص الخارجيين من نقطة  $\angle$  والمطلوب البرهنة  
 \* على أن المستقيم  $\angle$  منصف للزاوية  $\angle م$   $\angle م$  يقال من المعلوم أن النقطتين  $\angle$  و  $\angle$   
 \* التوصلتين من الاعمال التي أجريت في المسئلة المتقدمة هما متماثلتان بالنسبة للمستقيم  
 \*  $\angle$  الواصل بين المركزين فاذا دار المثلث  $\angle$   $\angle$   $\angle$  حول  $\angle$  فان نقطة  $\angle$  تنطبق  
 \* على  $\angle$  وتقع الزاوية  $\angle$   $\angle$  على الزاوية  $\angle$   $\angle$  وتكونان متساويتين وهو المطلوب

## نظـرية

\* (٣٧٢) الزاويتان الواقعتان بين مماسي القطع الناقص الخارجيين من نقطة واحدة وبين  
 \* المستقيمين الواصلين من هذه النقطة الى البورتين متساويتان (شكل ٢٩٥) أعني أن  
 \* زاوية  $\angle م = \angle م$   
 \* وللبرهنة على ذلك يقال ان المثلثين  $\angle ط$  و  $\angle ك$  متساويان لتساوي أضلاعهما  
 \* الثلاثة المتناظرة فيهما لان  $\angle ط = \angle ك$  و  $\angle ط = \angle ك$  و  $\angle ط = \angle ك$   
 \* ومن تساويهما يتبع أن زاوية  $\angle ط = \angle ك$  زاوية  $\angle ك$  فاذا طرحنا منهما الزاوية  
 \* المشتركة  $\angle ك$  تكون الزاويتان  $\angle ط$  و  $\angle ك$  متساويتين واذن يكون  
 \* نصفاهما  $\angle م$  و  $\angle م$  كذلك وهو المراد

## نظـرية

\* (٣٧٣) محل رؤس الزوايا القائمة المرسومة على قطع ناقص هو محيط دائرة متممه في المركز  
 \* ونصف قطره البعد الكائن بين نهايتي نصفي المحورين (شكل ٢٩٥)  
 \* لتكن الزاوية  $\angle م$  قائمة فعلى مقتضى النظرية السابقة تكون زاوية  $\angle ط$   
 \* كذلك ويحدث

$$\angle ط + \angle ك = \angle ط \quad \text{أو} \quad \angle ك + \angle ك = \angle ك$$

\* لكن المثلث  $\triangle \text{س د هـ}$  يؤخذ منه أن

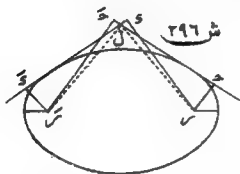
$$\overline{\text{س د}}^2 = \overline{\text{س هـ}}^2 + \overline{\text{د هـ}}^2 = \overline{\text{س د}}^2 - \overline{\text{د هـ}}^2 + \overline{\text{د هـ}}^2 \quad *$$

$$\overline{\text{د هـ}}^2 = \overline{\text{د ا}}^2 - \overline{\text{ا هـ}}^2 = \overline{\text{د ا}}^2 - (\overline{\text{ا ب}} - \overline{\text{ب هـ}})^2 \quad *$$

### نظريّة

\* (٢٧٤) حاصل ضرب بعدى كل واحد من بورتى القطع الناقص عن مماسة ثابت دائما

\* ومساو لربيع نصف المحور الاصغر (شكل ٢٩٦)



\* اذا مررنا من نقطة ل المماسين ل د و ل د

\* للقطع الناقص وأترئنا من البورتين س و س اعمدة

\* س هـ و س د و س ح و س د على هذين المماسين

\* ووصلنا س ل و س ل فالمثلثان س ل د و س ل د

\* المتماثلان يكونان متشابهين (٢٧٢) ويحدث

\*  $\frac{\text{س ل}}{\text{س د}} = \frac{\text{س د}}{\text{س هـ}}$  وكذا المثلثان القائم الزاوية س ل د و س ل د فهما متشابهان لان

\* زاوية س ل د أو س ل د + ح ل د مساوية لزاوية س ل د + د ل د ويحدث

$$\frac{\text{س ل}}{\text{س د}} = \frac{\text{س د}}{\text{س هـ}} \quad *$$

$$\text{س ل} \times \text{س هـ} = \text{س د} \times \text{س د} \quad *$$

\* أعني أن حاصل ضرب العمودين ثابت وللوصول الى مقداره يقال اذا اعتبرنا الحالة

\* الخصوصية التي يكون فيها المماس موازيا للمحور الاكبر فان كل واحد من العمودين يكون

\* مساويا لنصف المحور الاصغر ب ويحدث  $\text{س د} \times \text{س د} = \text{س د}^2$  وهو المطلوب

## المبحث الرابع

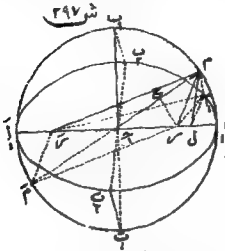
في مساحة القطع الناقص

### نظريّة

(٢٧٥) مسقط الدائرة على مستو هو قطع ناقص (شكل ٢٩٧)

والبرهنة على ذلك يقال حيث ان مسقطى أى شكل على مستويين متوازيين متساويان فنعتبر  
اذن مستوي المسقط مارا بمركز الدائرة وموازيا

لمستوى المسقط المعلوم



ليكن  $ا ا$  قطر الدائرة وخط تقاطعها

بمستوى المسقط و  $ب ب$  القطر العمودى عليه

و  $ب ب$  مسقطه فيكون عمودا على  $ا ا$

ثم وضع لاجل الاختصار  $ا ا = ب ب = ج ج$

و  $ج ج = د د$  و  $ب ب = هـ هـ$  ثم يؤخذ  $ج هـ$

$ج هـ = ب ب = د د$  فاننا اعتبرنا نقطة  $م$

من الدائرة وكان  $م$  مسقطها ووصلنا  $م$  و  $ا$  فاننا برهن على أن  $ا م = ب م + ج م$

وللوصول الى ذلك نمد القطر  $ج م$  المساوى  $ا م$  ثم المستقيمت  $م$  و  $م$  و  $م$

و  $م$  وننزل من البورة  $س$  العمود  $س ع$  على  $م م$  وننزل أيضا من نقطة  $م$  العمود  $م ل$

على  $ج ا$  ونصل  $م ل$  فالثلثان  $ج م ل$  و  $ج هـ م$  يكونان متشابهين (٢١٣) ويحدث

$\frac{ج ل}{م ل} = \frac{ج هـ}{م هـ}$  واذن يكون  $ع م = م م$  ويكون الثلثان القائمًا الزاوية  $م هـ م$

و  $م هـ م$  متساويين لمساواة وترؤض من أحدهما للنظير هما من الثانى وينتج من تساويهما

أن  $م هـ = م م$

وأما الثلثان القائمًا الزاوية  $م هـ م$  و  $م هـ م$  فهما متساويان أيضا لان فيهما الوترين

$م هـ$  و  $م هـ$  متساويان وفيهما الضلعان  $م م$  و  $م هـ$  كذلك وينتج من تساويهما أن

$م م = م هـ$  ويكون اذن  $م م + م هـ = م م + م هـ = ا م$  وهو المطلوب

نتيجة ١ - البعد  $م ل$  يسمى بالاحداثى الرأسى لنقطة  $م$  وأما البعد  $ل ج$  فيسمى

بالاحداثى الافقى لها وكذا يسمى البعد  $م ل$  بالاحداثى الرأسى لنقطة  $م$  والبعد  $ج ل$

يسمى باحداثيها الافقى وحيث ان تناسب  $\frac{م ل}{ج ل} = \frac{ب ل}{ا ل}$  الناتج من التثنية المتشابهين  $م ل$

و  $ب ب$  ثابت لاى نقطة مثل  $م$  من القطع الناقص أمكن أن يقال

ان القطع الناقص يمكن استخراجهم من الدائرة بواسطة تغيير احداثياتهم الرأسية على نسبة واحدة

نتيجة ٢ - يمكن أن يستنتج من هذه النظرية طريقة جديدة لرسم القطع الناقص لانا اذا

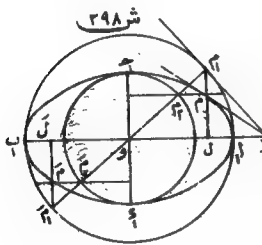
تصورنا دوران مستوي القطع الناقص حول المحور  $ا ا$  الى أن ينطبق على مستوى الدائرة فان

المستقيم  $م ل$  ينطبق ضرورة على  $م ل$  و  $ب ب$  على  $ب ب$  وهكذا وحيث ان الإبعاد

١ ل و ب ج و الخ لا تغير في أثناء الدوران وبعده فتكون النسبة السابقة  $\frac{ل}{ل} = \frac{ب}{ب}$  ثابتة وتاء عليه يمكن أن يقال

إذا فرض قطع ناقص ودائرة متحدتة معه في المركز وقطرهما ساو محوره الاكبر وأخذت نقطة على محيط كل منهما بحيث تكونان متحدتي المسقط على المحور الاكبر فتكون النسبة بين الاعدائي الرأسى لنقطة القطع الناقص وبين الاعدائي الرأسى لنقطة محيط الدائرة كالنسبة بين نصفي المحورين ب و ا

إذا قرر هذا وأريد رسم القطع الناقص الذي محوره ا ب = ١٢ و ج د = ٤٢ (شكل ٢٩٨)



فأنا رسم دائرتين متحدتي المركز بنصفي القطرين ا و ب ثم تأخذ نقطة م م مثلاً على محيط الدائرة وتزول منها العمود ١ ل على المحور و ا ونصل م و ثم نعلم نقطة م وفي تقاطع هذا المستقيم الواصل بمحيط الدائرة و ج المستقيم م م موازياً للمستقيم و ا فنقطة تقابل م بالعمود ١ ل تكون احدى نقط القطع الناقص لانه يحدث  $\frac{ل}{ل} = \frac{ب}{ا} = \frac{ج}{د}$

نتيجة ٣ - يمكن استنتاج كثير من خواص القطع الناقص مباشرة من اعتباره كانه مسقط لمحيط دائرة فماس القطع الناقص م ط هو مسقط مماس الدائرة م ط وحينئذ فلايجاد مماس القطع الناقص يجب وصل نقطة ط بنقطة م

وكذلك لو في الدائرة جله أو تار متوازية فيكون محل أو اسط هذه الاوتار قطر الدائرة وعمودا على اتجاهها وحيث ان هذه الاوتار تنسقط في مستقيمت متوازية وأن انصافها تنسقط في أنصاف مساقطها فيكون محل أو اسط جله أو تار متوازية في القطع الناقص هو مستقيم يمر بمركزه

### نظريّة

(٣٧٦) مساحة القطع الناقص تساوى حاصل ضرب نصفي محوريه في النسبة التقريبية بين محيط الدائرة وقطره

وللبرهنة على ذلك نبدأ أولاً بتقويم المساحة السطحية لجزء من القطع الناقص مثل ل د ع محصور بين الرأسين د ل و ع وبين المحور (شكل ٢٩٩)

فنقول اذا قسمت المسافة  $ح ل$  الى جله أجزاء متساوية وأقم من نقط التقاسيم أعمدة على المحور

الاكبر ومدت الى أن تلاقى محيط الدائرة الذى

مركزة  $و$  ونصف قطره  $أ$  فى النقط  $د$  و  $م$

و  $ع$  و ...  $د$  ثم رسم من النقط  $م$  و  $ع$

و  $د$  و  $م$  و  $ع$  و  $د$  مستقيمت موازية

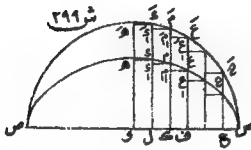
للمحور الاكبر فانه يتكون من ذلك جلتان

من المستطيلات متصلة جميعها فى القاعدة

أما ارتفاعات الجمله الاولى فهى الاحداثيات

الرأسية للقطع الناقص وأما ارتفاعات الجمله الثانية فهى الاحداثيات الرأسية للدائرة وبناء على

ما تقدم يحدث



$$\frac{ل}{أ} = \frac{م}{ك} = \frac{ع}{ف} = \frac{د}{ب} = \dots = \frac{م}{ك} = \frac{ع}{ف} = \frac{د}{ب}$$

ثم اذا مررنا بالحرف  $س$  لمجموع المستطيلات المرسومة داخل جزء القطع الناقص و  $س$

لمجموع المستطيلات المرسومة داخل جزء الدائرة تحصل  $\frac{س}{س} = \frac{ب}{أ}$  ولما كان هذا تناسب

حقيقيلهما كان عدد الاقسام المنقسم اليها البعد  $ح ل$  فإذا فرضنا ازدياد عدد هذه الاقسام

الى غير نهاية فنالعلوم أن المجموع  $س$  يقرب قريبا كلياً من مساحة جزء القطع الناقص  $س$

المطلوب تعيينها وأن المجموع  $س$  يقرب أيضاً قريبا كلياً من مساحة جزء الدائرة المناظرة لها  $س$

وحيث أن يكون عند النهاية  $\frac{س}{س} = \frac{ب}{أ}$

أعنى أن نسبة مساحة أى جزء من القطع الناقص محصور بين احدائين رأسيين عموديين على

محوره الى مساحة الجزء المناظر له من الدائرة المرسومة على هذا المحور كقطر لها كالنسبة بين

نصفي المحورين وبناء عليه اذا علمت مساحة جزء الدائرة وعلم المحوران يسرع السهولة تقويم

مساحة الجزء المذكور من القطع الناقص

اذا قررر هذا يقال اذا فرض تباعد النقطتين  $د$  و  $ع$  عن بعضهما الى أن تنطبقا على النقطتين

$ص$  و  $ص$  فإن جزء القطع الناقص يؤول الى نصفه وجزء الدائرة يؤول أيضاً الى نصفه وبناء عليه

يكون

$$\frac{ب}{أ} = \frac{س}{س} = \frac{\frac{ب}{أ}}{\frac{ب}{أ}} = \frac{\frac{ب}{أ}}{\frac{ب}{أ}} = \frac{ب}{أ} = ط أ ب \text{ وهو المراد}$$

## الفصل الثاني

في القطع المكافئ

## تعاریف

(٢٧٧) القطع المكافئ هو محل النقاط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة وعن مستقيم ثابت أيضا  
(شكل ٢٠٠)

النقطة الثابتة تسمى بؤرة القطع المكافئ والمستمع الثابت يسمى دليله ويرمز لها بالبؤرة  $B$  من بعد أي نقطة من نقط القطع المكافئ عن البؤرة يسمى نصف قطر بؤري ويرمز له هنا بالحرف  $r$

(٣٧٨) تعريف مماس القطع المكافئ هو عين تعريف مماس القطع الناقص (نمرة ٢٦١)

(٣٧٩) العمود الغير المحدود النازل من بؤرة القطع المكافئ على دليله يسمى محور

## المبحث الاول

في رسم القطع المكافئ

4-15

(٣٨٠) المطلوب رسم القطع المكافئ

الطريقة الاولى - وهي طريقة رسمه نقطة فنقطة (شكل ٣٠٠)

إذا علمتورة المحنى ودليله فانه ينزل من البورة ، العود

س على الدليل المعالم فتكون و وسط البعد س

أحدى نقط المتحنى على مقتضى التعريف (٢٧٧) ثم إذا

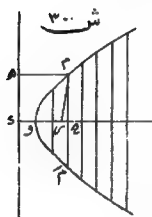
أخذت نقطة ما  $\odot$  على المحور  $rs$  وأقيم منها عمود  $غدر$

محدود و جعلت نقطة  $r$  مركزاً و رسم محيط دائرة بنصف

قطر مساو ۛ فانه بقطع العمود المذکور فی نقطتين

م و م تكونان من نقط المصني لان م هـ = و د

۴۷ =





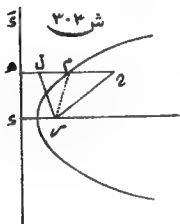


## المبحث الثاني

في بعض نظريات مهسة

### نظريتي

\* (٣٨١) كل نقطة مفروضة داخل القطع المكافئ تكون أقرب البؤرة من الدليل وكل نقطة خارجة عنه تكون بعكس ذلك (شكل ٣٠٣)



\* الأول - لتكن ٥ نقطة داخل القطع المكافئ

\* و ٥ و ٥ هـ بعدهما عن البؤرة وعن الدليل و م

\* نقطة تقابل ٥ بالمتحن فيصحت

$$* \quad ٥ م + م > ٥ \quad \text{أو} \quad ٥ م + م > ٥$$

$$* \quad ٥ م + م > ٥ \quad \text{أو} \quad ٥ م + م > ٥$$

\* الثاني - لتكن ل خارجة عنه و ل هـ

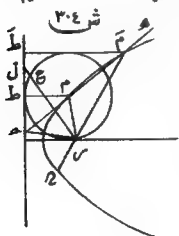
\* بعدهما عن البؤرة والدليل و م نقطة تقابل امتداد

\* ل هـ بالمتحن فيحصل ل < م - م أو م - م < ل أو م < ل هـ

\* وهو المراد

### عملية

\* (٣٨٢) اذا علم من القطع المكافئ بؤرة ودليله والمطلوب تعيين نقط تقاطعه بمستقيم معلوم



\* \* بنون رسم المتحن (شكل ٣٠٤)

\* يقال نفرض أن المسئلة محلولة وأن م هي إحدى

\* نقطة تقاطع المستقيم هـ بالمتحن وأن م، نصف

\* القطر البؤري لنقطة م و م ط المود النازل منها

\* على الدليل فإذا جعلت م مركزا ورسم محيط دائرة

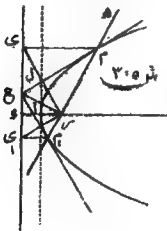
\* بنصف قطر مساو م، فإنه يس الدليل في نقطة ط

\* واذن فتعيين نقطة م يتوقف على حل المسئلة الآتية

\* وهي

- \* المطلوب امر از محيط دائرة بنقطة معلومة ويكون مماسا لمستقيم معلوم ويكون مركزه موجودا على مستقيم آخر معلوم
- \* لكنا اذا بجننا عن نقطة ح المائلة للبورة س بالنسبة للمستقيم المعلوم فتكون موجودة ضرورة على المحيط المذكور وبناء عليه فيرجع الامر الى حل المسئلة الاتية وهى
- \* المطلوب امر از محيط دائرة بنقطتين معلومتين ويكون مماسا لمستقيم معلوم فاذا م س ح على استقامته الى أن يلاقى الدليل فى نقطة ل وبجننا عن الوسط المناسب ل ط بين ل ح و س
- \* ووضعنا ميجانبي نقطة ل فانا توصل الى النقطتين ط و ط' ثم اذا مددنا مستقيمان موازيان للمحور تحصل نقطتا التقاطع م و م' المطلوبتان
- \* نتيجة - حيث انه لا يمكن وجود غير النقطتين ط و ط' فيستنتج من ذلك أن المستقيم لا يقابل المنحنى فى أكثر من نقطتين وبذلك يكون محدبا
- \* تنبيه ١ - اذا وقعت نقطة ح على الدليل فان النقطتين ط و ط' أو م و م' تحدثان معا وبناء عليه يكون المستقيم هـ مماسا للقطع المكافئ وأما اذا وقعت نقطة ح على شمال الدليل فيبدل ذلك على ان المستقيم هـ لا يقابل المنحنى
- \* تنبيه ٢ - اذا وازى المستقيم س ح الدليل فانه لا يوجد الا محيط واحد مارا بالنقطتين م و م' للدليل واذا نزلنا محيطا لانا نقطة تقاطع واحدة م ثم اذا دار المستقيم هـ حول نقطة م وأخذنا القرب شيأ فسيأمن أن يكون موازيا للمحور فان نقطة ل أو بالتبعية لها نقطة ط تنتقل على الدليل وتأخذ فى التباعدا الى غير نهاية وبناء عليه فتبعد نقطة م الى غير نهاية عن المنحنى

- \* تنبيه ٣ - اذا م المستقيم هـ بالبورة فانه لا يتوصل بالاعمال المتقدمة الى ايجاد نقطتى التقاطع غير أن الوصول اليهما فى هذه الحالة
- \* نقول (شكل ٣٠٥)



- \* اذا كانت م احدى نقطتى التقاطع وأزلنا منها العمود م ي على الدليل وجعلت مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو م س فانه يكون مماسا للدليل فى نقطة ي ثم اذا اقيم من نقطة س العمود س ح على المستقيم س م فيكون مماسا أيضا لمحيط الدائرة المذكورة واذا ن يكون ح = س ي وبناء عليه فانه

\* يسهل تعيين نقطة  $ي$  ومنهاتعين نقطة  $م$  وبأخذ البعد  $ح ي = ح ي$  فانها تعين  
\* أيضا نقطة  $م$  وهي النقطة الثانية لتقاطع المستقيم  $ح ه$  بالقطع المكافئ

### نظريية

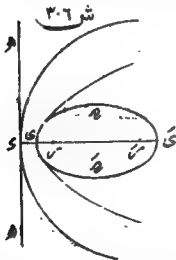
\* (٣٨٣) نصف القطر البوري لنقطة تماس مستقيم بقطع مكافئ عمود على المستقيم الواصل  
\* بين البورة ونقطة تلاقي المستقيم المماس بالدليل (شكل ٣٠٤)  
\* ليكن  $م م$  قاطعا للمحنى و  $ح$  نقطة تقابل بالدليل فاذا أنزل من النقطتين  $م$  و  $م$  عمودان  
\* على الدليل  $م ط$  و  $م ط$  حدث

$$\frac{م ط}{م م} = \frac{م ط}{م م} = \frac{م ط}{م م}$$

\* ومن هنا يعلم أن المستقيم  $ح م$  منصف الزاوية  $م م م$   
\* وحينئذ اذا أخذت نقطة  $م$  في التقريب شيئا فشيئا من نقطة  $م$  الى غير نهاية فان القاطع  
\* يقرب من أن يكون مماسا للمحنى في نقطة  $م$  على مقتضى التعريف وتقريب زاوية  $م م م$   
\* من القائمتين أو تقرب زاوية  $م م م$  من القائمة وهو المطلوب

### نظريية

\* (٣٨٤) القطع المكافئ هو النهاية التي يقرب منها قطع ناقص يزداد محوره الاكبر شيئا فشيئا  
\* الى غير نهاية بينما تكون احدي بوريته والرأس المجاورة لهما ثابتتين (شكل ٣٠٦)



\* وللهبنة على ذلك يقال ليكن  $ي ي$  و  $ي ي$   
\* قاطعا ناقصا و  $س$  و  $س$  بوريته و  $ي ي$   
\* محوره الاكبر فاذا رسمت الدائرة الدليلية للبورة  
\*  $س$  تكون جميع نقط المحنى على ابعاد متساوية  
\* من محيط هذه الدائرة ومن البورة

\* ثم اذا فرض بقا البورة  $س$  والرأس  $ي$  ثابتتين  
\* وفرض تزايد نصف المحور  $ا$  الى غير نهاية فان  
\* محيط الدائرة الذي قطره  $ا$  يأخذ في الكبر

\* شيئا فشيئا الى غير نهاية ويقرب من أن يتصدم المماس في نقطة  $س$  وبناء عليه يأخذ القطع

- \* الناقص من التقرب الى غير نهاية فتحو المحل الذى نقطه متساوية البعد عن البورة  $\gamma$  ومن المستقيم  $هه'$  أعنى نحو القطع المكافئ الذى بورة  $\gamma$  ودليله  $هه'$  وهو المطلوب
- \* تنبيه - يجب لادراك هذه النظرية جيدا أن يتصور نقطة على القطع الناقص متغيرة
- \* وموضوعة على بعد معين من البورة  $\gamma$  فن المعلوم أن وضع هذه النقطة يتغير كلما حصل
- \* تكيف فى شكل القطع الناقص المتحرك وتقرّب الى غير نهاية من احدى نقط القطع المكافئ
- \* الثابت الذى بورة  $\gamma$  ودليله  $هه'$
- \* نتيجة - ينتج مما ذكر أن جميع خواص القطع المكافئ يمكن استنتاجها من الخواص
- \* المناظر قلها من القطع الناقص بناء على الاعتبار المتقدم

### المبحث الثالث

#### فى تماس القطع المكافئ

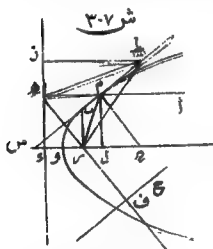
#### نظرية

- \* (٣٨٥) مماس القطع المكافئ ينصف الزاوية الواقعة بين نصف القطر البورى لنقطة
- \* التماس والمستقيم المربى بنقطة التماس موازيا للمحور (شكل ٣٠٥)
- \* أعنى ان المماس  $م$  ينصف الزاوية  $\gamma م$
- \* وللبرهنة على ذلك يقال حيث ان زاوية  $م \gamma م$  قائمة (٣٨٣) يكون المثلثان القائمما
- \* الزاوية  $م \gamma م$  و  $م$  متساويين لان فيهما الوتر  $م$  مشترك بينهما والضلع
- \*  $م \gamma م$  وتكون زاوية  $م \gamma م = م \gamma م$  وهو المراد
- \* نتيجة ١ - اذا أريد مماس للقطع المكافئ من نقطة عليه يكنى أن يرسم نصف القطر
- \* البورى لها ويمد منها مستقيما وازى المحور ثم تنصف الزاوية الحادثة بينهما
- \* نتيجة ٢ - اذا وصل المستقيم  $\gamma م$  فن حيث ان كل واحدة من النقطتين  $م$  و  $ح$
- \* على بعدين متساويين من نهايتى هذا المستقيم تكونان موجودتين على العمود القائم على وسطه
- \* واذن فتكون نقطة  $ل$  مسقط البورة  $\gamma$  على المماس  $م$  وهى وسطى  $\gamma$  وحيث
- \* ان نقطة  $ا$  وسط البعد  $\gamma د$  أمكن أن يقال ان محل مساقط البورة على المماس هو العمود
- \* القائم على المحور من رأس المحنى

- \* نتيجة ٣ - إذا أخذت نقطة م في التقرب شيئاً من نقطة ا فان زاوية م ح ر تقرب من القائمتين ويقرب المستقيم المنصف م ح من أن يكون عموداً على المحور واذن
- \* فيكون مماس المنحنى في رأسه عموداً على المحور
- \* نتيجة ٤ - يسهل مشاهدة تساوى الأبعاد م ح و ح ي و ح ي على الشكل وقيام
- \* الزاوية م ح م واذن جعل رؤس الزوايا القائمة المرسومة على القطع المكافئ هو الدليل

## نظريّة

- \* (٣٨٦) تحت العمود (الرأسي) في القطع المكافئ كمية ثابتة مساوية نصف القطر البوري
- \* العمودى على المحور (شكل ٣٠٧)



- \* اذا لمن نقطة م احدى نقط القطع المكافئ
- \* مماس له م س وأُترل منها العمود م ل على
- \* المحور واقيم م ح عموداً على المماس وملتقى
- \* يلاق المحور في نقطة ح فيكون البعد ل ح
- \* هو ما يسمى بتحت العمود (الرأسي) ثم اذا وصل
- \* م ح وأُترل م هـ عموداً على الدليل ووصل
- \* م هـ فيكون هذا المستقيم عموداً على المماس

- \* بناء على النظرية السابقة واذن فيكون موازياً للعمود المنحنى م ح وبناء عليه يكون الشكل
- \* م هـ ح د متوازياً أضلاعاً ويبحث

- \* م ح د هـ = م هـ د ل أو م ح د ل = م ل - ل ر أو ل د = م ح
- \* ويرمز عادة لهذا البعد م ح بالحرف ح ويكون تحت العمود ح وأما مساواة البعد
- \* م ح بالاحداثى الرأسى م ح المقابل للبورة أو الوتر البورى فهو ظاهر وبذلك ثبت المطلوب

## نظريّة

- \* (٣٨٧) تحت المماس في القطع المكافئ يساوى ضعف الاحداثى الافقى لنقطة التماس
- \* (شكل ٣٠٧)
- \* الاحداثى الافقى لاى نقطة ممثل م هو البعد ول المحصور بين رأس المنحنى و وبين

- \* موقع الاحداثى الرأسى ل لنقطة المذكورة وأما تحت المماس فهو البعد ل من المحصور
- \* بين موقع الاحداثى الرأسى لنقطة التماس وبين نقطة تقابل المماس بالمحور
- \* إذا تقرر هذا يقال ان المثلث م ص من متساوى الساقين لتساوى زاويتين منه على مقتضى
- \* الخواص الاصلية للمماس ويكون  $ص = م = ه = ل$  وبناء عليه يكون
- \*  $ص ل = دس$  وحيث ان  $ص = ود$  تكون نقطة و وسط البعد ل س ويكون
- \*  $ل س = ٢ ول$  وهو المراد

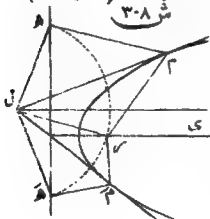
### نظريّة

- \* (٣٨٨) الاحداثى الرأسى ل لاى تقطعتن القطع المكافئ وسط متناسب بين الاحداثى الافقى لها وبين الوتر البورى (شكل ٣٠٧)
- \* ليكن م س مماسا للقطع المكافئ و م ل الاحداثى الرأسى لنقطة التماس م و م د رأس
- \* المحنى فى نقطة م فانه يحصل من المثلث القائم الزاوية م د س ان  $م ل = ل س \times د ل$
- \* وبناء على النظرية السابقة يحدث
- \*  $م ل = ٢ ول = ٢ \times د ل$  وهو المراد

- \* تنبيه - يرمز عادة بالحرف س للاحداثى الافقى لاى نقطة وبالحرف ص للاحداثى
- \* الرأسى لها فيحدث ص = ٢ ح س ويسمى هذا الارتباط بمعادلة المحنى ويسمى برسمه
- \* نقطة فنقطة

### عملية

- \* (٣٨٩) المطلوب رسم مماس للقطع المكافئ من نقطة خارجة عنه (شكل ٣٠٨)
- \* لتكن ل النقطة المفروضة خارج القطع
- \* المكافئ فإذا فرض ان المسئلة محلولة وان لم
- \* هو المماس المطلوب لزم البحث عن نقطة
- \* التماس م
- \* فإذا مد من هذه النقطة نصف القطر البورى
- \* م س وأترى العود م ه على الدليل يشاهد
- \* ان معرفة نقطة ه كافية لتحديد نقطة م



- \* بواسطة تقابل م ه بالعود ل م النازل من نقطة ل على س ه
- \* ولتعيين نقطة ه يقال حيث أن ل ه = ل س بناء على ما نقرر (بمرة ٣٨٥ نتيجة ٤)
- \* فنؤخذ نقطة ه بناء على ذلك في تقابل الدليل بحيط الدائرة الذي مركزه ل ونصف قطره
- \* ل س لكنه لما كان محيط الدائرة يقابل الدليل عموماً في تقاطعين ه و ه فيكون للمسئلة
- \* اذاً على وجه العموم حلان ل م و ل م
- \* تنبيه - لاجل أن تكون المسئلة ممكنة يجب ويكفي أن يقابل محيط الدائرة الدليل وهذا
- \* يستلزم أن يكون بعد نقطة ل عن البورة أكبر من بعدها عن الدليل أعني أنها تكون خارجة
- \* عن المنحنى وأما اذا وجدت عليه فإن الدائرة ل س تكون مماسة للدليل وبذا يؤول الحلان
- \* الى واحد

## عملية

- \* (٢٩٠) المطلوب مدهمس القطع المكافئ يكون موازياً لاتجاه معلوم (شكل ٣٠٧)
- \* ليكن عى الاتجاه المعلوم ونفرض ان المسئلة محلولة وان م ط هو المماس المطلوب ان
- \* اذا البحث عن نقطة التماس م
- \* فإذا أنزلنا من نقطة م العود م ه على الدليل كانت معرفة نقطة ه كافية لتعيين نقطة
- \* م على مقتضى خواص المماس المقررة وللوصول الى ذلك يقال
- \* اذا وصل س ه كان هذا المستقيم عموداً على المماس أو على الاتجاه المعلوم وبناء عليه فانه
- \* يكفي لتعيين نقطة ه أن ينزل من نقطة س عمود على الاتجاه المعلوم ويمد حتى يلاقى الدليل
- \* تنبيه - اذا تغير وضع الاتجاه عى و أخذنا شيئاً الى غير نهاية في القرب من أن يكون
- \* موازياً للمعور فإن نقطة ه تباعد عن الدليل الى غير نهاية وكذا تباعدت نقطة ل عن
- \* مماس رأس المنحنى الى غير نهاية وأما نقطة م فانها تباعدت عن المنحنى الى غير نهاية أيضاً
- \* فإذا صار عى موازياً للمعور فإن نقطة ه تنعدم ولا يكون للمنحنى مماس أو يكون مماسه
- \* موجوداً على بعد لا نهائى



## الفصل الثالث

### في القطع الزائد

#### تعاريف

(٣٩١) القطع الزائد هو محل النقط التي يكون الفرق بين بعدى كل واحدة منها عن نقطتين ثابتتين فيه ثابتاً دائماً (شكل ٣٠٩)

النقطتان الثابتتان تسميان بوري القطع الزائد ويرمز لهما بالرمزين  $س$  و  $س'$  بعد أي نقطة من نقط المحل عن أي واحدة من البورين يسمى نصف قطر بوري ويرمز لنصفي القطرين البورين لاي نقطة بالحرفين  $ص$  و  $ص'$  ويرمز للفرق الثابت بين نصفي القطرين البورين لاي نقطة بالمقدار  $٢ا$  وأما البعد بين البورين فيرمز له بالمقدار  $٢ب$  (٣٩٢) تعريف محاس القطع الزائد هو عين تعريف محاس القطع الناقص

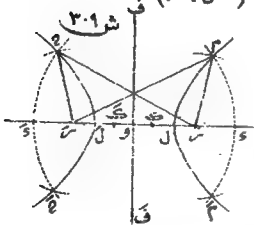
#### المبحث الاول

في رسم القطع الزائد

#### عملية

(٣٩٣) المطلوب رسم القطع الزائد

الطريقة الأولى - وهي طريقة رسمه نقطة فنقطة (شكل ٣٠٩)



لتكن  $س$  و  $س'$  بوري القطع الزائد وليكن  $٢ب$  البعد الكائن بينهما و  $٢ا$  الفرق الثابت المعلوم الذي يجب أن يكون أقل من  $٢ب$  لان الضلع  $سس'$  أو  $٢ب$  من المثلث  $سس'$  أكبر من الفرق بين الضلعين الآخرين  $س-س'$  أو  $٢ا$  أكبر من  $٢ب$  فإذا أخذ على المستقيم  $سس'$  كل واحد من البعدين  $سك'$  و  $س'ك$  مساو  $٢ا$  ونصف كل واحد من  $سك$  و  $س'ك'$

فان اتوصل الى تقاطع  $ل$  و  $ل'$  من نقط المحل وذلك لان

(٧) الصفحه اليه (رابع)

$$1_2 = \bar{k}_v = \bar{v} \bar{l} - \bar{v} \bar{l} \quad , \quad 1_2 = \bar{k}_v = \bar{v} \bar{l} - \bar{v} \bar{l}$$

ثم اذا فرضت نقطة مثل  $\delta$  على عين نقطة  $\lambda$  وجعلت نقطة  $\epsilon$  مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو  $\epsilon\delta$  ثم جعلت بعد ذلك  $\epsilon$  مركزا ورسم محيط دائرة بنصف قطر مساو  $\epsilon\delta = 12$  فانه يقطع الاول في النقطتين  $\mu$  و  $\nu$  وتكونان من نقط المخني لان  $\mu\epsilon = \nu\epsilon = \epsilon\delta = 12$

ثم اذا غيرنا الصفي القطرين يعضهم ماور كنزافي البورتين ورسنا محيطي دائرتين اخريين فان اتوصل الى نقطتين جديدتين 2 و 2

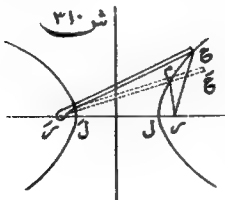
تنبيه - لاجل ان يتقاطع محيط الدائرتين يجب و يكتفى أن يكون

أولاً  $\langle s + s' \rangle$  وثانياً  $\langle s - s' \rangle$

ومن ذلك يشاهدان هذين الشرطين لايحققان الا اذا كانت نقطة  $z$  على عين نقطة  $l$  وأما اذا انطبقت نقطة  $z$  على  $l$  فان المحيطين يتماسان وبذلك يقصد نقطتا  $m$  و  $m'$  معاني نقطة  $l$  نتيجة ١ - ينتج مما ذكر أن محوري تماثل نقط المتحي هما  $ss'$  والمستقيم  $ff'$  العمودي علىهما والمرتبطة و  $ss'$  وسط  $ss'$

نتيجة ٢ - حيث ان البعد  $s$  ال هو النهاية الصغرى للابعد  $s_1$  فيتركب المحل اذا و لا  
من قسم ذي فرعين لانهما يتنمائي الوضع بالنسبة للمستقيم  $s_1$  وموضوعين على عين  
ف ف  $s_1$  ثمة بتغير نصف القطر ين توصل ثانيا الى قسم آخر موضوع على شمال ف ف  
وعمائل الاول وبناء عليه فيتركب المحل من جزأين خارجين عن المسافة المحصورة بين العمودين  
المقامين على  $s_1$  من نقطتي ل و ل

نتيجة ٣ - حيثان نقطة و مركز ثقل  
نفسى لهذا السبب عبر مركز الثقل  
الطريقة الثانية - وهى طريقة رسمه دفعة  
واحدة (شكل ٣١٠)



إذا تصورنا نهاية مسطرة يدور حول البؤرة  $S$  ووربطنا في النهاية الثانية  $C$  لها محيط يتقص طوله عن طول المسطرة المقدار الثابت  $2a$  وبقينا طرفه الثاني في البؤرة  $S$  ثم أدركنا المسطرة حول

البورة  $\sigma$  وشددنا المحيط بسن قلم راسم  $\mu$  مع انطباقه دائماً على المسطرة فانه يرسم قوساً من منحنى القطع الزائد لان

$$\sigma\mu - \sigma\mu = (\sigma\mu + \sigma\mu) - \sigma\mu - \sigma\mu = \sigma\mu - \sigma\mu$$

## المبحث الثاني

في بعض نظريات مهمة

### نظريه

\* (٢٩٤) القطع الزائد هو محل النقط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة وعن محيط دائرة ثابت أيضاً (شكل ٣١١)

\* لتكن  $\sigma$  و  $\sigma'$  بؤرتي القطع الزائد و  $\sigma''$

\* محيط الدائرة الثابت الذي مركزه  $\sigma$  ونصف

\* قطره  $\sigma\sigma'$  فاذا كانت  $\mu$  احدى نقط القطع

\* الزائد فمحصل بناء على التعريف ان

$$\sigma\mu - \sigma'\mu = \sigma\mu - \sigma'\mu \text{ لكن } \sigma\mu - \sigma'\mu = \sigma\sigma'$$

\* فيكون  $\sigma\mu = \sigma'\mu$  واذن فتكون نقطة  $\mu$

\* على بعدين متساويين من البورة  $\sigma$  ومن محيط

\* الدائرة  $\sigma\sigma'$

\* وأما نقط الفرع الثاني فهي محققة أيضاً لهذه الخاصية وذلك لانه اذا كانت  $\mu'$  احدى

\* نقط هذا الفرع فمحصل  $\sigma\mu' - \sigma'\mu' = \sigma\sigma'$  وحيث ان

$$\sigma\mu' - \sigma'\mu' = \sigma\sigma' \text{ يكون } \sigma\mu' = \sigma'\mu'$$

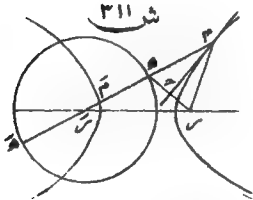
\* الدائرة  $\sigma\sigma'$  تسمى بالدائرة الدليله للبورة  $\sigma$

\* تنبيه - يظهر من هذه النظرية ما بين القطع الناقص والقطع الزائد من قوة الارتباط واذنا

\* فيمكن اعتبار هذين المنحنيين كأنهما حالتان خصوصيتان لحل واحد فالقطع الناقص يقابل

\* الحالة التي تكون فيها  $\sigma$  داخل الدائرة الدليله التي مركزها  $\sigma$  وأما القطع الزائد فانه

\* يقابل الحالة التي تكون فيها  $\sigma$  خارجة عنها



\* نتيجة - يمكن أن يستتبع من هذه النظرية طرق جديدة لرسم القطع الزائد ويكون لها  
\* منزلة أخرى وهي تعين المماس حـم للنقطة المقروضة

نظريّة

\* (٢٩٥) كل نقطة تفرض داخل القطع الزائد يكون الفرق بين نصفي قطريها البؤريين أكبر

\* من المحور القاطع وكل نقطة تفرض خارجة عنه

\* يكون الفرق بين نصفي قطريها البورين أقل

• من المحور المذكور (شكل ٣١٢)

\* فرعا القطع الزائد يقسمان المستوى الى ثلاثة

\* أقسام فيقال لأي نقطة أنها داخل القطع

• الزائد متي وجدت مع احدى البورتين في قسم

\* منها ويسأل لها خارجة عنه اذا لم يكن الامر

\* كذا

\* أولا - لتكن  $\phi$  داخله القطع الزائدي فصل  $\phi$  و  $\phi^*$  و  $\phi^*$  و  $\phi$  فيحدث

\*  $m + m < m$  واذن يكون

$$\bar{v}_m + v_n < v_m + v_n \text{ أو } \bar{v}_m + v_n < v_m + v_m + v_n *$$

\* ومن ذلك يمكن أن يستتبع أن

[illegible]

\* ثانياً - اذا كانت ل خارجة فصل ل ر ، ل ر ، م ر فمحدث

\* ل > لم + مَ أو ل > لم + مَ + مَ أو ل > لم + مَ + مَ + مَ أو

$$v_m + v_j > v_m + v_l \quad *$$

\* ومن ذلك ينتج أن  $ل-ل \geq م-م$  أو  $أ \geq ١٢$  وهو المطلوب

علیہ

\* (٢٩٦) المطلوب إيجاد نقط تقاطع مستقيم بمنحني قطع زائد بدون رسم المنحني

ليكن المعلوم من القطع الزائد دورتيه  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  والفرق الثابت  $2a$  والمستقيم المعلوم

\* من ص

- \* فإذا فرضنا أن المسئلة محولة وان  $m$  هي إحدى نقطتي تقابل المستقيم  $m$  من بالهني
- \* ثم مركزنا في نقطة  $s$  ورسمنا الدائرة الداليلة للبوقة  $s$  ومركزنا أيضاً في نقطة  $m$  ورسمنا محيط
- \* دائرة بنصف قطر مساو  $m$  فيكون مماسا للمحيط الاول (٢٩٤) وبناء عليه فقد رجعنا
- \* إلى عين الاعمال التي اجريت في مثل هذه المسئلة في القطع الناقص
- \* نتيجة - المستقيم لا يمكنه أن يقابل القطع الزائد في أكثر من نقطتين وبذلك يكون المنعنى
- \* محتملاً

## المبحث الثالث

في تماس القطع الزائد

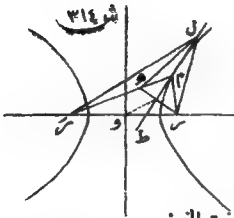
### نظريّة

- \* (٢٩٧) مماس القطع الزائد في أي نقطة بنصف الزاوية المكوّنة من نصفي القطرين
- \* البوريين لهذه النقطة (شكل ٢١٣)
- \* إذا كانت  $m$  إحدى نقطتي القطع الزائد
- \* واعتبرنا القاطع  $m$  مماساً للمحيط هذه النقطة  $s$
- \* وبأخرى  $m$  قوساً مجتهداً من الأولى فعلى
- \* مقتضى الفرض يكون
- \*  $m-s = s-m = ١٢$  و  $m-s = s-m = ١٢$
- \* فإذا عيننا نقطة  $c$  المائلة للبوقة  $s$  بالنسبة
- \* للقاطع ووصلنا بينهما وبين  $s$  بمستقيم
- \* ومددناه حتى يقابل القاطع في نقطة  $k$  فتكون هذه النقطة متمتزة بالاقبل عن واحدة من
- \* النقطتين  $m$  و  $m$  ولتكن عن  $m$  مثلاً فيحدث
- \*  $c-s = k-s < s-m = m-c$  أو  $c-s = k-s < m-s = s-m$  أو  $١٢ < ١٢$
- \* واذن تكون نقطة  $k$  داخلية للقطع الزائد ومتمتزة عن النقطتين  $m$  و  $m$  وموضوعة
- \* على الوتر الجامع لهما وغير ذلك بشاهد أن القاطع منصف للزاوية المتكوّنة بين نصفي القطرين
- \* البوريين  $k-s$  و  $k-s$

- \* اذا قرر هذا وفرضنا ان نقطة مَ تقرب شيئاً شياً الى غير نهاية من نقطة م فان نقطة
- \* ك تقرب أيضاً نحو م وأما كـ و كـ فانهما ينتهيان بان يتطبقا على نصف القطرين
- \* البورين مـ و مـ و بناء عليه تكون نهاية القاطع مـ هو المستقيم النصف
- \* للزاوية مـ و وهو المطلوب

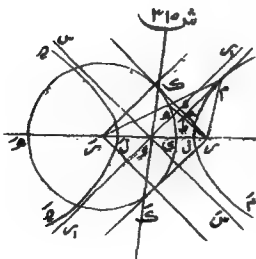
## عملية

- \* (٣٩٨) المطلوب مد مماس للقطع الزائد من نقطة مفروضة عليه (شكل ٣١٤)



- \* لتكن م نقطة مفروضة على القطع الزائد
- \* ولتكن مـ و مـ بورتيه وليكن مـ المحور
- \* القاطع فممن نصف القطرين البورين مـ و مـ
- \* مـ مـ ثم نأخذ على مـ البعد مـ = مـ
- \* ونزل من نقطة م العمود مـ ط على مـ
- \* فيكون منصفاً للزاوية مـ مـ و حينئذ
- \* يكون مماساً للقطع الزائد على مقتضى
- \* النظرية السابقة

- \* نتيجة - مماس القطع الزائد يوجد بتعلمه بين فرعي المنحنى
- \* وذلك لانه اذا كانت ل نقطة مامن هذا المماس مغايرة لنقطة م فصل بينهما وبين النقط
- \* مـ و هـ و مـ مستقيمان فيحدث أن لـ لـ = لـ لـ = لـ لـ و مـ > مـ
- \* أو > مـ واذن فتكون نقطة ل خارجة عن القطع الزائد وهو المطلوب
- \* ولنبحث الآن عن الوضع النهائي لمماس القطع الزائد متى انتقلت نقطة تماسه على المنحنى
- \* وأخذت في التباعد الى غير نهاية (شكل ٣١٥)



- \* لتكن م نقطة من القطع الزائد فترسم الدائرة
- \* الدليلة للبورة مـ ونعتمد نصف القطرين
- \* البورين مـ و مـ ولتكن هـ نقطة
- \* تقابل مـ مـ بمحني الدائرة فالعمود مـ ط
- \* النازل على هـ يكون مماساً للقطع الزائد
- \* في نقطة مـ ثم نعلم من نقطة مـ المماسين
- \* مـ و مـ كـ محيط الدائرة الدليلة

\* أولاً - اذا كان وضع النقطة هـ فى عى على المستقيم صـ تكون نقطة م فى الوضع ل  
\* ويكون المماس عمودا على صـ

\* ثانياً - إذا سارت نقطة ه نحو ك فإن نقطة م تصعد على منحنى القطع الزائد  
\* ويصنع المماس زاوية حادة مع المحور  $xx'$

\* ثالثاً - إذا قربت نقطة هـ من أن تصل مع نقطة كـ فإن هـ يقرب من أن يكون عموداً على سـ هـ. وحينئذ فالعمود المقام على وسط سـ هـ يقرب نحو و، الموازي إلى سـ هـ. وإذا نمتعد نقطة التماس عن النخني إلى غربانه

- \* وبالعكس إذا أخذت نقطة التماس في التباعد عن النخني الى غير نهاية يكون الوضع النهائي للتماس هو المستقيم ٢ ، الذي يمر بالمركز ولا يقابل النخني ويسمى هذا المستقيم الشهير
- \* بالخط التقرى للنخني

\* يظهر من تماثل المحيآن و  $\frac{1}{2}$  امتداد المستقيم و  $\frac{1}{2}$  هو خط تقريبي وان المستقيم وس  
\* المائل للمستقيم و  $\frac{1}{2}$  بالنسبة للصورة هو خط آخر تقريبي

\* يُؤخذ من المثلث ود، ان  $\frac{1}{7} = \frac{1}{k} = 1 = 0$

\* وهذه الملاحظة يتوصل بها الرسم الخطي التقريبي لقطع زائد معلوم مع السهولة

علمية

\* (٣٩٩) المطلوب مدعما للقطع الزائد من نقطة خارجة عنه (شكل ٣١٦)

\* لتكن  $L$  النقطة المعلومة بين فرعي المنحنى

\* فنقرض ان المسئلة محاولة وان لم هو

\* المماس المطاوع فيلزم البحث عن نقطة

\* التماس م

\* ولذلك يقال اذا رسمنا الدائرة الدليله للسورة \*

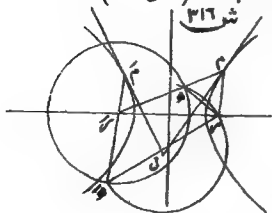
\* وكانت هـ نقطة تقابل محط هذه الدائرة

• نصف القطر الموري  $M$  من المعاوم ان

\* نقطة م تعين اذا علم وضع نقطة ه لكنه

\* حيث كان  $L = L_0$  تكون نقطة  $H$  موحودة في تقابل محيط الدائرة الدليلية بالدائرة

\* التي مكرها ل ونصف قطرها ل



\* وهاتان الدائرتان تتقاطعان عموماً في نقطتين هـ و هـ فيكون إذن للمسئلة حلان

\* ل م و ل م

\* تنبيه - لاجل أن تقبل المسئلة هذين الحلين يجب ويكفي تقاطع محيطي هاتين الدائرتين

\* وهذا يستلزم أن يكون البعدين المركزين لـ س أقل من مجموع نصفي القطرين ١٢ و لـ س

\* وأكبر من فاصلهما

\* أولاً - إذا كانت ل من فرعي المتحنى وليست على المستقيم سـ فإن النقط الثلاثه

\* ل و س و سـ يتكوّن منها مثلث يحدث منه أن

(١)  $ل + س < س < ١٢$

\* فإذا كان لـ س أقل من لـ س مع وجود نقطة ل خارجة حدث

(٢)  $ل - س > ل > ١٢$

\* ويحدث بداهة أن

(٣)  $ل - س > ل + س > ١٢$

\* وإذا كان لـ س أكبر من لـ س بفرض أن نقطة ل خارجة حدث

(٤)  $ل - س > ل > ١٢$

\* ويحدث بداهة أن

(٥)  $ل > ل + س > ١٢$

\* وينتج من الارتباطات (١) و (٢) و (٣) أن لـ س أصغر من مجموع نصفي القطرين

\* وأكبر من فاصلهما

\* وينتج ما ذكر أيضاً من الارتباطات (١) و (٤) و (٥)

\* ثانياً - إذا كانت ل موجودة على سـ بين رأسى المتحنى فإن الارتباطات (١) و (٢)

\* و (٣) و (٤) و (٥) تتحقق وتقبل المسئلة حلين

\* ثالثاً - إذا كانت نقطة ل على المتحنى يحصل لـ س = ل + سـ وحينئذ ينالس

\* الدائرتان وبذلك يصعد المماسان معا

\* رابعاً - إذا وجدت نقطة ل على أحد الخطين التقريبيين فإن أحد المماسين ينطبق على

\* هذا الخط التقريبي وتكون نقطة التماس على بعد لانهاى

\* خامساً - إذا انطبقت نقطة ل على مركز المتحنى فإن المماسين ينطبقان على الخطين

\* التقريبيين

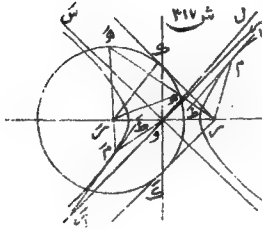
\* سادساً - إذا وجدت نقطة ل داخل المتحنى وفي جهة واحدة مع البورة س حدث

\* لـ س - ل > ١٢ وحينئذ يكون المحيطان متباعدين وبذلك لا يكون للمسئلة حلول



## عملية

- \* (٤٠٠) المطلوب مدحاس للقطع الزائد يكون موازيا لاتجاه معلوم (شكل ٣١٧) \*  
 \* ليكن ول الاتجاه المعلوم كاتفاقي الزاوية  $\theta$  المتكونة من الخطين التقريبيين \*  
 \* فاذا فرض أن المسئلة محاولة وأن  $م ط$  هو \*  
 \* المماس المطلوب فمعدنصفي القطرين البورين \*  
 \*  $م س$  و  $م$  لنقطة  $م$  ونرسم الدائرة الدليلة \*  
 \* للبورة  $س$  فتكون نقطة  $هـ$  وهي تقابل \*  
 \* الدائرة الدليلة بنصف القطر البوري  $م س$  \*  
 \* مماثلة لنقطة  $س$  بالنسبة للمماس وحيث \*  
 \* فيكون تعيين هذه النقطة كافي لحل المسئلة \*



- \* ولتعيينها يقال حيث أن  $هـ$  عمود على المماس فيكون عموداً أيضاً على موازيه ول واذن \*  
 \* فتعين نقطة  $هـ$  بتقاطع الدائرة الدليلة للبورة  $س$  مع العمود النازل من نقطة  $س$  على \*  
 \* الاتجاه المعلوم \*  
 \* وحيث أن هذين المحلين يتقاطعان عموماً في نقطتين فيكون اذن على وجه العموم للمسئلة \*  
 \* حلان  $ط م$  و  $ط م$  \*  
 \* تنبيه - اذا فرضنا أن الاتجاه المعلوم ول يدور حول نقطة و ليقرب من الخط التقريبي \*  
 \*  $\theta$  فان العمود  $س ك$  والمحلين  $م ط$  و  $م ط$  يقربان نحو الخط التقريبي  $\theta$  \*  
 \* واذا استمر ول في دورانه وأخذ الوضع وم فان العمود المائل من نقطة  $س$  على ول \*  
 \* لا يقابل الدائرة الدليلة وبذلك لا يكون للمسئلة حلول \*  
 \* وينتج من هذه المناقشة أن الاتجاه ول يجب أن يكون محصوراً في زاوية الخطين التقريبيين \*  
 \*  $\theta$  و  $\theta$  \*

## الفصل الرابع

## في المنحى البري

تعريف

(٤١) المتحنى البرمجي هو المتوالى من تحركات نقطة على سطح اسطوانى تحركى بحيث يكون بعدها عن قاعدتها مناسبا للقوس المحصور بين الوضع

الابتدائي للرأسم وبين وضعه المار بها

فاذا تصورنا تحرك النقطة م مثلاً على سطح

اسطوانی تحرکی (شکل ۳۱۸) وکن بعدہائی

كل لحظة عن قاعدة الاسطوانة م مثلًا مناسباً

للنقوس ال المحصور بين الوضع الابتدائي للرسم.

وبين وضع المار بنقطة م المتحركة فان المنحنى

المتولد من ذلك يسمى منحنيًا بريما

ومن المعلوم أنه متى وصلت النقطة المتحركة م الى

الوضع الابتدائي للرأس في نقطة ١ فإن النقطة ل

تكون قد أتمت مرورها على محيط دائرة القاعدة ويسمى البعد  $l$  بالاحداثي الرأسى للنقطة

المحركة في الوضع م وأما البعد ١١ فيسمى بخطوة البرية وأما قوس المنحنى البري المحصور

بين نقطة أ ونقطة ب | فيسمى بلفة المنحنى البرمي

ثم اذا جعل  $\theta$  رمزاً لنصف قطر قاعدة الاسطوانة و  $c$  للاحدائى الرأسى للنقطة المتحركة

وهذا القوس الأول مع الخطوة البرية يحصل على مقتضى التعريف

$$\frac{ع}{ط_1} = \frac{ح}{ط_2} \text{ ومنه } ع \times \frac{ط_2}{ط_1} = ح$$

## نظريّة

(٤٠٢) يمكن اعتبار المنحنى البرعي كانه متوال من مستقيم موجود في مستوى ارتفاعه على

اسطوانة (شكل ٣١٨)

لذلك يعدمستوى بالراسم  $\alpha$  ويرسم عليه المستطيل  $\alpha\alpha'$  بحيث تكون قاعدة مساوية  
اطول محيط دائرة قاعدة الاسطوانة ثم نقسم الارتفاع  $\alpha\alpha'$  الى جله اقسام متساوية ثلاثة مثلاً  
وغدا المستقيمين  $\alpha\alpha'$  و  $\alpha\alpha'$  موازيين للقاعدة ونصل الاقطار  $\alpha\alpha'$  و  $\alpha\alpha'$  ثم نمد  
مستقيما  $\alpha\alpha'$  موازيا الى  $\alpha\alpha'$  وقاطع الاقطار في النقطة  $\alpha$  و  $\alpha$  و  $\alpha$  فيحدث

$$\frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha'} = \frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha'} \quad \text{وانذن يكون} \quad \alpha\alpha' = \alpha\alpha' \times \frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha'}$$

وحينئذ يكون  $\alpha\alpha'$  احد اثار أسيا المحز برعى يكون  $\alpha\alpha'$  خطوله لان  $\alpha\alpha'$  يدل على  
قوس من محيط القاعدة وبناء عليه اذا التف المستطيل  $\alpha\alpha'\alpha\alpha'$  على الاسطوانة فان المستقيم  $\alpha\alpha'$   
يلتف على محيط القاعدة والمستطيل على السطح الجانبي للاسطوانة والقطر  $\alpha\alpha'$  يلتف على  
الفة البرعة  $\alpha\alpha'$  حيث ان احدي نقطه هذا القطر  $\alpha$  تنطبق على نقطة مناظرة لها من لفة  
البرعة واما باقى الاقطار فانها تسمى المصنى

## نظريية

- \* (٤٠٣) الزاوية التى يصنعها راسم المصنى البرعى مع راسم الاسطوانة ثابتة دائماً (شكل ٣١٨)
- \* وللبرهنة على ذلك نفرض نقطة  $\alpha$  قريبة جد من نقطة  $\alpha$  وليكن  $\alpha\alpha'$  احد اثنيها
- \* الرأسى فالمستقيمان  $\alpha\alpha'$  و  $\alpha\alpha'$  يتقاطعان في نقطة  $\alpha$  ويكون

$$\frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha'} = \frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha'} = \frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha'}$$

$$\frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha'} = \frac{\alpha\alpha'}{\alpha\alpha'} \quad \text{وانذن يكون}$$

- \* فاذا قربت  $\alpha$  من  $\alpha$  فان النسبة بين الوتر وقوسه تقرب من الوحدة وبناء عليه يكون

$$\alpha\alpha' = \alpha\alpha' = \alpha\alpha'$$

- \* وانلحظ  $\alpha\alpha'$  يسمى تحت المماس وحينئذ فيكون تحت المماس لاى نقطة من منحن برعى
- \* مساويا لقوس القاعدة المقابل لهذه النقطة

- \* فاذا أخذ على المستطيل  $\alpha\alpha'$  البعد  $\alpha\alpha' = \alpha\alpha'$  يكون الاحداثى الرأسى  $\alpha\alpha'$
- \* مساويا  $\alpha\alpha'$  وانذن فيكون المثلث  $\alpha\alpha'\alpha$  مساويا للمثلث  $\alpha\alpha'\alpha$  وبناء عليه فيصنع
- \* المماس زاوية ثابتة  $\alpha\alpha'$  مع الراسم وهو المراد

- \* تنبيه - ماذكرناه يتوقف على أن النسبة بين قوس ووتره تكون نهايتها الوحيدة متى صغر
- \* القوس واخذ في القرب من الصغر

## الفصل الخامس

### تمرينات

- ١ - المطلوب رسم القطع الناقص اذا علم منه  
أولا - بورة وعماسان واحدى نقطه  
ثانيا - بورة وعماسان واحدى نقطتي التماس  
ثالثا - بورة وعماس واحده ونقطه تماسه واحدى نقطه المتحنى  
رابعا - بورة ورأس ونقطه من نقطه  
خامسا - بورة وثلاث نقط من نقطه
- \* ٢ - المطلوب رسم القطع المكافئ اذا علم منه  
\* أولا - البورة وعماسان  
\* ثانيا - الدليل وعماسان  
\* ثالثا - البورة وعماس ونقطه تماسه  
\* رابعا - الدليل وعماس ونقطه تماسه  
\* خامسا - البورة وعماس واحدى نقطه المتحنى  
\* سادسا - الدليل وعماس واحدى نقطه المتحنى  
\* سابعا - البورة ونقطتان من نقطه المتحنى  
\* ثامنا - الدليل ونقطتان من نقطه المتحنى
- \* ٣ - المطلوب معرفة المحل الذى ترسمه احدى نقطه مستقيم ذى طول ثابت تنزلق نهايتاه على ضلعي زاوية قائمة

يقول خادم تصحيح العلوم بدار الطباعة البهية سيولا قمعصر المعزلة الفقير الى الله تعالى  
محمد الحسيني أعانه الله على أداء واجبه الكفائي والعيني

يا مصور المكنونات على أبداع الاشكال ومشيئاً أركان ملكك على محكم قواعد باقن مثال  
تحمداً إذ أحطت بنادائرة امتنانك وأدرت لنا معتدل رحمتك وأدرت علينا غيوث احسانك  
ونصلى ونسلم على سيدنا ومولانا محمد قطب فلک الجمال ومرکز مدار الجلال وعلى آله وصحبه  
ومحببيه وحزبه (أما بعد) فقد تم طبع هذه المرة القيمة وتكمل حسن هذه البضة الوسيمة  
وتجمل وثى هذه المنقحة الرخيمة المسماة (بالتحفة البهية في الاصول الهندسية) نسيجة بنان  
الصنع الماهر ونتيجة فكر الالمعي الباهر النابغة الاديوب والمهبط اللبيب ذى الطبع الرقيق  
وانخلق القويم عزتوا حدبك تنظيم ناظر مدرسة دارالعلوم البهية وقلم الترجمة للمعارف الملكية  
لجائن بجمدة الله تمس عجايب هذا الجمال وتخطرت يها بين نلمان المعارف بهذا الدلال بالطبعة  
الكبرى العاصرة سيولا قمعصر القاهرة في ظل الحضرة الفخيمة الخديوية وعهد الطلعة

البهية التوفيقية حضرتمن جعله الله رجلاً رعيته ونعمة كبرى على برته المخلوط

من مولانا معين العناية والحماية والتوفيق افندينا أبو العباس محمد توفيق

لا زالت ألوية النصر خافقة على هامته مؤيداً من الله برعايته

البيال باشباله فرح الفؤاد بأشجاله وكان تمام هذا الطبع

البيج وتعطر الارباب بعرفه الاربيج في أواخر محرم

الحرام افتتاح عام ست بعد ثلثمائة والقب

من هجرة عليه أفضل الصلاة والسلام

وعلى آله مصابيح الطللام

وأصحابه بدور التمام

آمين



## فهرسة الجزء الرابع من التحفة البهية

صفحة	صفحة
٢٨ المبحث الثاني في بعض نظريات مهمة	٣ الجزء الرابع في الاجسام المستديرة
٣١ المبحث الثالث في تماس القطع الناقص	والقطاعات المخروطية والمنحنى البرمى
٣٦ المبحث الرابع في مساحة القطع الناقص	٣ الباب الاول في الاجسام المستديرة
٤٠ الفصل الثاني في القطع المكافئ	٣ الفصل الاول في الاسطوانة
٤٠ المبحث الاول في رسم القطع المكافئ	٦ الفصل الثاني في المخروط
٤٢ المبحث الثاني في بعض نظريات مهمة	١١ الفصل الثالث في بعض سطوح واجسام
٤٥ المبحث الثالث في تماس القطع المكافئ	دورانية
٤٩ الفصل الثالث في القطع الزائد	١٨ الفصل الرابع في الكرة
٤٩ المبحث الاول في رسم القطع الزائد	٢٣ الفصل الخامس تمرينات
٥١ المبحث الثاني في بعض نظريات مهمة	٢٥ الباب الثاني في القطاعات المخروطية
٥٣ المبحث الثالث في تماس القطع الزائد	والمنحنى البرمى
٥٨ الفصل الرابع في المنحنى البرمى	٢٥ الفصل الاول في القطع الناقص
٦٠ الفصل الخامس تمرينات	٢٥ المبحث الاول في رسم القطع الناقص

(عت)

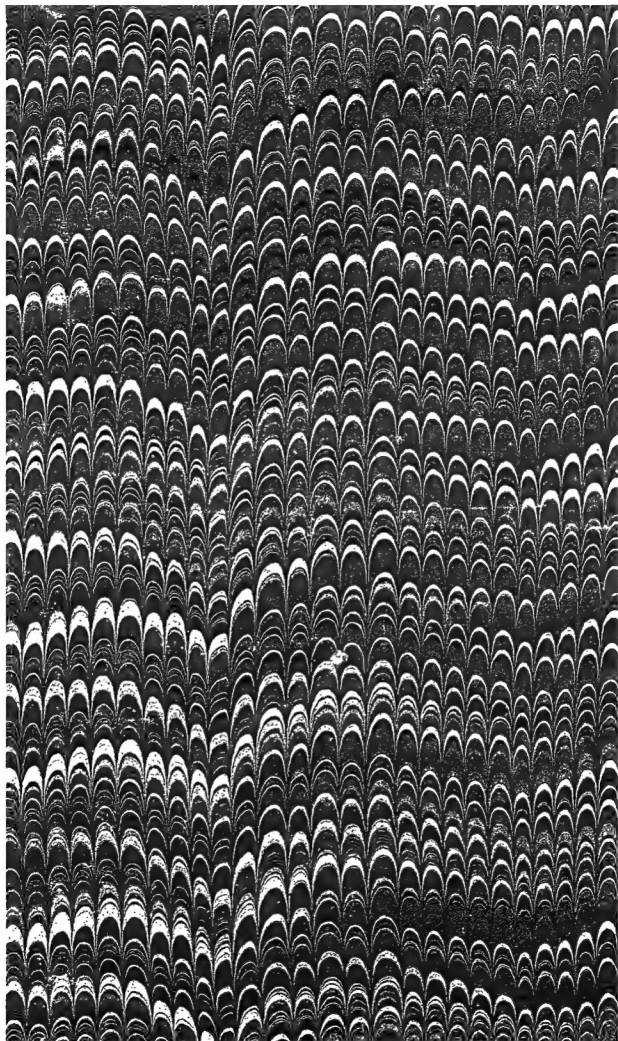


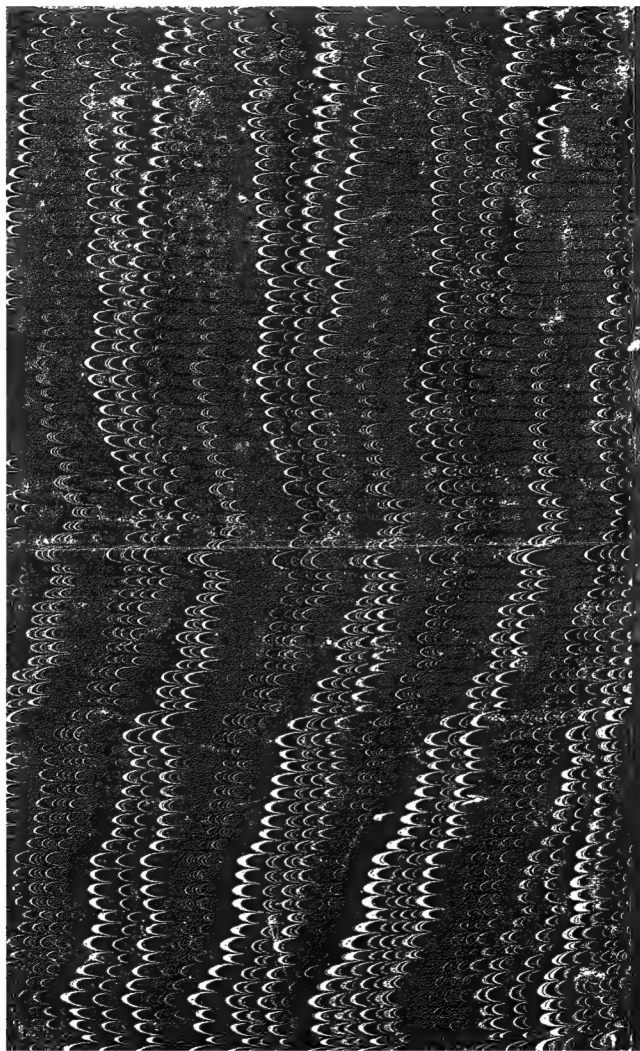














Bibliotheca Alexandrina



0556907